2012 第 期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE 中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387





反证法就是证明原命题的逆否命题吗?

——一则教学案例的分析

362321　福建省南安国光中学　黄锦华

【镜头1】教师的准备

对于选修4-5《不等式选讲》中的"反证法",教师预设教案如下:

(一) 提出问题

在《不等式选讲》的第一节课,我们学习了不等式的6个性质,当时我们证明了性质(3)、性质(4)和性质(5),而性质(6)"如果 $a>b>0$,那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$"的证明悬而未决.下面我们再次思考这个命题该如何证明.

(二) 引发讨论

1. 学生讨论.预习过的学生知道可以用反证法来证明.

2. 对学生可能的其他回答及应对预设如下:

(1) 这个命题显然是成立的

应对:数学公理无需证明,其余定理需要用公理、已经证明的定理、法则等来证明(期待学生自己回答,若无反应,教师再作回答,下同).

(2) 由幂函数的性质可知

应对:幂函数的性质是通过不完全归纳得到,其严格证明有待以后继续研究.

(3) 没有学生想到用反证法证明该命题

应对:用"拉门与推门","正难则反"等启发学生想到用反证法来解决问题.

(三) 解决问题

1. 通过讨论,想到"正难则反",可以考虑用反证法证明该命题之后,教师再启发学生回顾初中所学习的反证法的有关知识,引导学生用反证法证明该命题.

证明:假设 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 不成立,则 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$ 或 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.若 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$,则 $a=b$;若 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$,则 $a<b$,这都与 $a>b>0$ 矛盾,因此假设不成立,从而命题成立.

2. 证明过程中,可能会有学生考虑不全面,认为结论"$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$"的否定为"$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$",教师可期待其他学生作出补充,并提醒学生当所证命题结论的反面情况不止一个时,必须将其逐一驳论,才能得到原命题的结论正确.

(四) 反证法的定义和步骤

通过上述问题的解决,师生一起归纳什么是反证法以及使用反证法进行间接证明的步骤.

1. 反证法:先假设要证的命题不成立,以此为出发点,结合已知条件,应用公理、定义、定理、性质等,进行正确的推理,得到和命题的条件(或已证明的定理性质、明显成立的事实等)矛盾的结论,以说明假设不正确,从而证明原命题成立,我们把这种证明方法称为反证法.对于那些直接证明比较困难的命题常用反证法证明.

2. 反证法的步骤:

(1) 否定:假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立.

(2) 归谬:从假设出发,经过推理,得出矛盾.

(3) 反驳及肯定:由矛盾知假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

其中常用的矛盾有以下三种可能:

(1) 与已知条件矛盾.

(2) 与已知定理、公理、定义、法则或显然成立的事实等矛盾.

(3) 与假设矛盾.

(五) 巩固练习与总结

针对本节课内容, 从课本例题、习题以及教学参考书中选择3至5道题目, 进行讲练结合, 巩固反证法的应用. 最后进行总结.

评析: 教学设计应采用弹性设计, 要充分考虑到学生可能出现的各种想法, 才能在课堂教学过程中灵活应对, 而不至于出现被"挂在黑板上"等尴尬, 或做出偏颇的判断和引导. 这位教师在备课时, 摈弃了空城计等故事的迂回引入, 沿用了课本提供的引例, 以不等式的性质(6)的证明问题引入反证法, 直截了当. 在分析与解决问题时, 充分考虑学生可能的想法, 以及证明过程中可能出现的障碍(对结论的否定不全面). 之后再根据引例, 归纳反证法的定义和步骤. 最后进行巩固练习与总结. 这位教师的教学设计中规中矩, 估计学生的反应不会在很大范围内超越这些预设.

【镜头2】课堂上的波澜骤起

课堂上, 教师胸有成竹地进行"问题引入", 学生的讨论并没有超越教师的预设, 最后学生意识到直接证明比较困难, 可以考虑采用反证法. 进而, 师生回顾初中课本中的反证法的有关知识, 并着手用反证法证明该命题. 果不其然, 有部分学生认为结论"$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$"的否定为"$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$", 而其他部分学生对此提出疑义, 作出补充, 教师借此提醒学生当所证命题结论的反面情况不止一个时, 必须将其逐一驳论, 才能得到原命题的结论正确. 接下去, 师生归纳反证法的定义、步骤. 一切似乎尽在把握之中. 却不料一位同学的发言令课堂波澜骤起.

A同学: 老师, 反证法就是证明原命题的逆否命题吗? 刚才我们为了证明"如果$a>b>0$, 那么$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$", 我们假设$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$或$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$, 然后推出$a=b$或$a<b$, 这不就是原命题的逆否命题吗?

教师一怔, 一方面觉得学生的观点似乎很有道理, 另一方面又觉得似乎哪里有些不妥. 这个问题涉及到了反证法的逻辑原理, 此前竟然没有对此进行过思考, 实在是太过失职了! 这个出其不意的发言, 让教师一时无法作出判断.

教师: A同学具有很敏锐的数学眼光, 能透过问题思考其本质, 即反证法的逻辑原理是什么. 下面我们就探讨一下, 用反证法证明一个命题, 是否相当于证明原命题的逆否命题? 反证法的逻辑原理是什么?

B同学: 反证法常用的"归谬"有三种情况, 与已知条件矛盾; 与已知定理、公理、定义、法则或显然成立的事实等矛盾; 与假设矛盾. 刚才那道题目的"归谬"恰好是与已知条件矛盾, 但有的题目"归谬"是和定理、公理等矛盾, 或者与假设矛盾, 这个时候就和逆否命题无关. 所以我认为只有在推导过程中, "归谬"是和已知条件矛盾的情况下, 反证法就是证明原命题的逆否命题. 此时, 反证法的逻辑原理是: 要证$p\Rightarrow q$, 等价于证$\neg q\Rightarrow\neg p$.

其他同学略加思考之后, 纷纷表示赞同. 而此时教师趁着学生思考与讨论的时间, 基本理清了反证法的逻辑原理, 并且预料学生可能出现的错误, 发现自己课前准备的一道习题或许可以帮助学生意识到这个错误.

评析: 学生"出其不意"的发言, 不失为精彩的课堂生成, 然而教师事先对此没有任何的准备. 此时教师方意识到自己备课不充分, 且自己的数学专业知识存在缺陷. 好在这位教师并没有因此放弃这么有价值的生成性资源, 而是对A同学的探索精神表示赞许和肯定, 同时把这个问题抛给其他学生, 自己则获得时间, 趁机对该问题进行思考, 并迅速"理清"了思路. 其后, B同学对A同学的问题进行了补充, 但是仍然不够准确, 教师调整了教学设计, 准备让生成继续推动课堂教学. 可见这位教师拥有很好的教学理念, 并且临危不乱, 随机应变, 具备了充分的教学机智.

【镜头3】因势利导

教师: B同学说得很好! 当使用反证法最后推出的矛盾并不是和已知条件矛盾的时候, 其推理就和原命题的逆否命题无关. 这点大家都同意吗?

A同学信服地点头表示同意, 其他同学也没有疑义.

教师: 在推导过程中, "归谬"与已知条件矛盾的情况下, 反证法就是证明原命题的逆否命题吗?

学生: 对啊.

教师: 请大家思考下面这道题目, 或许可以发现些什么.

已知实数 a、b、c、d 满足 $ad-bc=1$, 求证: $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\neq 1$.

一听教师说或许可以发现些什么, 学生都兴致盎然地思考这道题目. 教师在巡视过程中, 果然发现了两种解法, 于是教师让相应的学生把答案写在黑板上.

证法1: 设 $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=1$, 则

$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2ab+2bc+2cd-2ad+2ad-2bc=2$,

即

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(a-d)^2+2ad-2bc=2$,

若

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(a-d)^2=0$,

则 $a=b=c=d=0$, 于是 $ad-bc<1$; 若

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(a-d)^2\neq 0$,

则 $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(a-d)^2$ 为正数, 所以必有 $ad-bc<1$.

综上即得 $ad-bc\neq 1$, 从而原命题得证.

证法2: 假设 $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=1$, 又已知 $ad-bc=1$, 由此得

$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=ad-bc$,

从而有

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(a-d)^2=0$,

于是 $a=b=c=d=0$, 因此 $ad-bc\neq 1$, 这与已知条件矛盾, 故原命题得证.

教师: 大家觉得这两种证法有什么共同点和不同点?

学生: 共同点是都采用了反证法, 而且"归谬"都是与已知条件矛盾. 不同点是证法1没有使用已知条件 $ad-bc=1$, 而证法2使用了这个条件.

教师: 大家归纳得很好! 既然"归谬"都是与已知条件矛盾, 那么这两种证法都是证明了原命题的逆否命题吗?

C同学: 原命题的逆否命题是"若 $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=1$, 则 $ad-bc\neq 1$", 而证法1恰好是证明了原命题的逆否命题. 证法2在证明过程中使用了已知条件 $ad-bc=1$, 应该不算是证明了原命题的逆否命题.

教师: 把已知条件"$ad-bc=1$"记为"p", 而把结论"$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\neq 1$"记为"$q$", 大家试着用字母表示来思考证法1和证法2各进行了怎样的逻辑推理.

D同学: 证法1的逻辑推理是"$\neg q\Rightarrow\neg p$", 恰好是原命题的逆否命题. 证法2的逻辑推理……

E同学: 证法2用到了已知条件"p", 所以它的逻辑推理是"$p\wedge\neg q\Rightarrow\neg p$", 并不是证明原命题的逆否命题. 所以并不是说"归谬"与已知条件矛盾的情况下, 反证法就是证明原命题的逆否命题.

教师将"$p\wedge\neg q\Rightarrow\neg p$"板书下来, 并给其他同学充分的思考时间. 终于, 学生陆陆续续有所领悟.

教师: E同学的总结相当到位! 那大家能否用数学表达式表示反证法的逻辑原理?

学生: "$\neg q\Rightarrow\neg p$"或者"$p\wedge\neg q\Rightarrow\neg p$", 也可能是"$p\wedge\neg q\Rightarrow$ 和定理、公理等矛盾"

教师: 那如何用数学表达式来表示"矛盾"?

学生经过思考, 纷纷皱眉摇头表示无能为力.

教师: 所谓"矛盾"就是不能同时成立, 一个条件和它的否定是不能同时成立的, 所以我们是否可以用"$r\wedge\neg r$"来表示"矛盾"?

学生表示认可用"$r\wedge\neg r$"来表示"矛盾", 即证明"$p\Rightarrow q$"的反证法逻辑原理有三种, 分别为"$\neg q\Rightarrow\neg p$"、"$p\wedge\neg q\Rightarrow\neg p$"、"$p\wedge\neg q\Rightarrow r\wedge\neg r$". 教师将其一一板书, 表扬了学生的探究精神.

评析: A同学的生成性资源引发了B同学的生成, 他们的观点都存在欠缺, 却是颇有数学价值的生成性资源. 教师比较成功把握住了这点, 并运用课前准备的一道相关习题, 因势利导, 运用"追问", 逐步启发学生探究反证法的逻辑原理. 此处教师的成功一方面说明了教师课前准备还是比较充分的, 另一方面却带有明显的偶然性. 如果教师没有准备那道习题, 这位教师则需要更充分的数学专业知识, 更强的临场应变能力, 更多的教学智慧, 方能使课堂生成得以持续. 至于教师直接提出用"$r\wedge\neg r$"来表示"矛盾", 似乎有"灌输"之嫌, 然而考虑到具体学情, 教师的直接"灌输"是具有其合理性的.

【镜头4】波澜再起

教师认为关于反证法的逻辑原理问题已经探讨清楚，接下去正准备组织例题与练习，却不料波澜再起.

F同学：老师，如果像课本第27页的例1，已知条件由几部分组成，那它所用的反证法的逻辑形式是什么？

教师：看来F同学课前进行了预习. 那我们大家一起来看一下这道题目吧.

通过F同学的这个意外生成，教师再次发现自己思维的不严密，但很快弄清楚了该怎样补充完整，于是教师组织学生思考课本例1，在学生的回答中板书其证明过程.

例1　已知x、$y>0$，且$x+y>2$，试证：$\dfrac{1+x}{y}$, $\dfrac{1+y}{x}$中至少有一个小于2.

证明：假设$\dfrac{1+x}{y}$, $\dfrac{1+y}{x}$都不小于2,

即$\dfrac{1+x}{y}\geqslant 2$，且$\dfrac{1+y}{x}\geqslant 2$,

$\because x,y>0$,

$\therefore 1+x\geqslant 2y,\ 1+y\geqslant 2x$.

$\therefore 2+x+y\geqslant 2(x+y)$,

$\therefore x+y\leqslant 2$,

这与已知条件$x+y>2$矛盾,

$\therefore$ 假设不成立，即$\dfrac{1+x}{y}$与$\dfrac{1+y}{x}$中至少有一个小于2.

评析：通过F同学的疑问，这位教师发现了自己对反证法的逻辑原理的理解仍然不够透彻，只得及时地对自己思维的漏洞进行弥补. 此处仍然体现了教师具有很强的教学能力，方能处变不惊，在课堂生成的波澜起伏中，引领学生获取真知，同时也提升了自己的知识.

【镜头5】拨云见日

学生：这个题目中已知条件由x、$y>0$和$x+y>2$组成，我们通过假设结论不成立，结合已知条件中的x、$y>0$，推出与另一已知条件$x+y>2$矛盾.

教师：能否用数学表达式概括一般情况？

教师给学生充分的时间考虑问题，自己也进一步理清了思路.

G同学：把已知条件看成“$p\wedge s$”，由条件“p”和否定的结论“$\neg q$”推出与条件“s”矛盾的结果“$\neg s$”，即“$p\wedge\neg q\Rightarrow\neg s$”.

教师：非常好！所以，通过同学们的积极探索，我们得到反证法的逻辑原理总共有四种等价形式：(1)证明$p\Rightarrow q$等价于证$\neg q\Rightarrow\neg p$; (2)证明$p\Rightarrow q$等价于证$p\wedge\neg q\Rightarrow\neg p$; (3)证明$p\Rightarrow q$等价于证$p\wedge\neg q\Rightarrow r\wedge\neg r$; (4)证明$p\wedge s\Rightarrow q$等价于证$p\wedge\neg q\Rightarrow\neg s$. 同学们对反证法的原理分析真是鞭辟入里，令老师自愧不如！希望大家可以继续保持这种学习数学的热情.

此时下课铃声响起，教师心满意足地走出了教室. 虽然在学生意外生成的“干扰”之下，没有完成预设的教学任务，但是这节课的内容更加体现了数学本质，同时学生的思维能力得到了锻炼，教师也受益匪浅，增长了自己所忽视的数学知识.

评析：这位教师并没有因为这节课没完成预定任务而沮丧，反而为学生的勇于探索的精神而高兴，并及时表扬了学生. 因为真实的课堂教学，不可能完全按照预设的轨道进行，其进程是由教师、学生以及多种因素之间动态的相互作用而决定的. 正如美国著名教育家布鲁姆所言：“人们无法预知教学所产生的全部成果. 如果没有预料不到的成果，那么教学也就不成为一种艺术了[1].” 因此，我们应该以发展的眼光来看课堂教学. 课堂教学不是教案的再现，圆满完成预设的教学任务并不一定能让学生得到最佳的发展. 课堂教学更重要的是培养学生的学习能力和创新精神.

【镜头6】教师的教学后记

课后，教师在教学后记中记录下了刚才的几幕镜头，并写下了自己的感悟与思考.

1. 尽管我自认为作了充分的弹性预设，但是由于自身的数学知识存在着缺陷，这导致了我课前准备其实并不充足，课堂设计只重解题而忽视了数学本质. 因此，今后应该努力通过各种途径来弥补数学学科知识.

2. 课前应该广泛查阅各种资料，熟悉所教内容，并做好更加充分的预设.

3. “教学相长”. 学生的能力蕴含着无穷的可能性，经常会出现超越教师预设甚至是教师知识水平的观点，教师如果能充分捕捉、善待这些生成性资源，必将不断促进自身的专业成长.

（下转第12-10页）

2012年上海高考数学(理科)压轴题探究

201300　上海南汇中学　王海平　李　志

今年上海高考数学(理科)试卷的压轴题,字母较多,抽象程度较高,涉及的知识面较广,考查的数学思想方法丰富,是一道比较有趣的试题,值得"把玩"、探讨.本文先给出试题的一个容易思考的解法,然后提供一个将问题全面解决的一般性方案,最后可以得到比较完美的结论.

一、试题

对于数集 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$,$n\geqslant 2$,定义向量集 $Y=\{\overrightarrow{a}|\overrightarrow{a}=(s,t),s\in X,t\in X\}$,若对任意 $\overrightarrow{a_1}\in Y$,存在 $\overrightarrow{a_2}\in Y$,使得 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$,则称 X 具有性质 P.例如 $\{-1,1,2\}$ 具有性质 P.

(1) 若 $x>2$,且 $\{-1,1,2,x\}$ 具有性质 P,求 x 的值;

(2) 若 X 具有性质 P,求证:$1\in X$,且当 $x_n>1$ 时,$x_1=1$;

(3) 若 X 具有性质 P,且 $x_1=1$、$x_2=q$(q 为常数),求有穷数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的通项公式.

二、学生应答情况和障碍分析

据统计,本题的平均得分为2.61分.对于满分为18分的试题来说,尽管是压轴题,2.61分的得分实在偏低.

考后我们向一些高三考生了解到基本上有三个方面的原因:其一,上海的考生对于数学论证有些怯怕,原因是上海的教材偏重计算,即使出现证明问题,也常常是计算型证明题,类似压轴题这种逻辑证明的练习比较少,所以学生逻辑证明的能力比较差;其二,这道试题的特点是字母多,文字语义比较抽象(任意……,存在……,使得……),学生理解比较困难;第三,由于整卷比较难,学生的考试时间有限,因此,很多学生来不及思考最后这道费解的问题.

三、解题策略分析

这道试题初看起来字母比较多,问题比较抽象,所以把抽象问题具体化就很关键,并且题目有可以具体化的条件,因此解决试题的基本想法是"归纳——猜想——证明".

在第(1)小题中,需验证 $X=\{-1,1,2,x\}$ 满足性质 P,其中题意告知 $\{-1,1,2\}$ 具有性质 P,故只需验证含 x 的向量 $\overrightarrow{a_1}$ 满足性质 P 就可以了,解题的方法很具体,即便是"穷举",工作量也不大.

在第(2)小题中,需要用到一般化的假设 $(s,t)\in Y$,还用到反证法和分类讨论,其思考的抽象性比第(1)小题有所提高,但是通过对第(1)题的具体讨论,应试者对题意内涵的理解应该比较清楚,并且本小题还有一些具体的附着点(如 $1\in X$,$x_n>1$ 等)可用来帮助思考.

第(3)小题应该是比较抽象的,但是有(1)、(2)题的铺垫,不难由 $x_2=q$ 推得 $x_3=q^2$,进一步推得 $x_4=q^3$,于是可以猜想 $x_n=p^{n-1}$,然后再证明猜想成立.

四、解答和说明

(1) 因为 $\{-1,1,2\}$ 具有性质 P,所以对于 $X=\{-1,1,2,x\}$,只需验证向量 $\overrightarrow{a_1}$ 分别为 (x,x)、$(x,-1)$、$(x,1)$、$(x,2)$ 时存在 $\overrightarrow{a_2}$,满足 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$.事实上,前三个向量对应的 $\overrightarrow{a_2}$ 依次为 $(1,-1)$、$(1,x)$、$(-1,x)$.对于 $\overrightarrow{a_1}=(x,2)$,设 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)\in Y$,满足 $xs+2t=0$.因为2和 x 都是正数,所以 s、t 必须异号,而 -1 是 X 中唯一的负数,所以 s、t 之一为 -1,另一属于 $X/\{-1\}$.又考虑到 $x>2$,可解得 $s=-1$,$x=4$.

(2) 当 $\overrightarrow{a_1}=(x_i,x_i)\in Y$,($i=1,2,\cdots,n$) 时,设 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)\in Y$ 满足 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$,即 $(s+t)x_i=0$,由此得 $s+t=0$,又因为 X 中只

有唯一的负数 -1, 所以 s、t 之一为 -1, 另一为 1, 故 $1\in X$.

假设 $x_1\neq 1$, 而 $x_k=1$, $1<k<n$, 则有 $0<x_1<1<x_n$. 选 $\overrightarrow{a_1}=(x_1,x_n)\in Y$, 设 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)\in Y$ 满足 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$, 即 $sx_1+tx_n=0$, 因为 $0<x_1<x_n$, 所以 $t=-1$, 则 $x_n=sx_1<s\leqslant x_n$, 此式自相矛盾, 因此得 $x_1=1$.

(3) 第一步分析和猜想

1) 验证 $X_2=\{-1,1,q\}$ 满足条件 P. 因为对任意的 $\overrightarrow{\alpha_1}\in Y$, 都有 $\overrightarrow{\alpha_2}\in Y$ 使 $\overrightarrow{\alpha_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_2}=0$:

$\overrightarrow{\alpha_1}$	$(-1,-1)$、$(1,1)$、(q,q)	$(-1,1)$	$(-1,q)$	$(1,q)$
$\overrightarrow{\alpha_2}$	$(-1,1)$	$(1,1)$	$(q,1)$	$(q,-1)$

2) 推算: 当 $\{-1,1,q,x\}$ 满足条件 P 时, 取 $\overrightarrow{\alpha_1}=(q,x)$, 设 $\overrightarrow{\alpha_2}=(s,t)$ 满足 $sq+tx=0$, 可推得 $t=-1$, $s\in\{1,q\}$, 又考虑到 $x>q$, 推得 $s=q$, $x=q^2$, 记 $X_3=\{-1,1,q,q^2\}$.

3) 再推算: 当 $X_4=\{-1,1,q,q^2,x\}$ 满足条件 P:

取 $\overrightarrow{a_1}=(q^2,x)\in Y$, 设 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)\in Y$ 满足 $sq^2+tx=0$, 因为 q^2 和 x 都是正数, 所以 s、t 异号, 故 s、t 有一个为 -1, 另一个属于 $X/\{-1\}$.

因为 $x>q^2$, 可依次推得 $t=-1$, $x=sq^2$, 所以 s 可取 q 或 q^2. 当 $s=q^2$ 时, $x=q^4$, 此时 $\overrightarrow{a_1}=(q,q^4)$ 没有对应的 $\overrightarrow{a_2}$ 满足 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$. 当 $s=q$ 时, $x=q^3$, 此时可验证 $X_4=\{-1,1,q,q^2,q^3\}$ 满足条件 P.

由此可以猜测, 由满足条件 P 的集合 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 所确定的数列 $\{x_n\}$ 的通项公式 $x_i=q^{i-1}$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$.

第二步用数学归纳法证明:

记 $X_k=\{-1,1,x_2,\cdots,x_k\}$, $(k=2,3,\cdots n)$.

i) 当 $n=2$ 时, 结论显然成立.

ii) 假设 $X_k=\{-1,1,x_2,x_3,\cdots,x_k\}$ 具有性质 P 时, $x_i=q^{i-1}$ $(i=2,3,\cdots,k)$, 即 $X_k=\{-1,1,q,q^2,\cdots,q^{k-1}\}$.

设 $X_{k+1}=\{-1,1,q,\cdots,q^{k-1},x_{k+1}\}$ 具有性质 P. 取 $\overrightarrow{a_1}=(q,x_{k+1})$, 设 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)$, $(s,t\in X_{k+1})$ 满足 $sq+tx_{k+1}=0$, 可推得 s、t 二者之一为 -1, 另一属于 $X_{k+1}/\{-1\}$.

因为 $x_{k+1}>q^{k-1}>q^{k-2}>\cdots>q>1$, 所以由 $sq+tx_{k+1}=0$ 可推得 $t=-1$ 和 $x_{k+1}=sq$, 因为 $x_{k+1}=sq>x_k=q^{k-1}$, 所以 $s>q^{k-2}$. 考虑到 $s\in X_{k+1}$, 所以得 $s=q^{k-1}$, $x_{k+1}=q^k$.

由归纳假设知 Z_k 具有性质 P, 再由于当 $\overrightarrow{a_1}=(q^k,q^i)$ 时, 存在 $\overrightarrow{a_2}=(-1,q^{k-i})\in Y$ $(i=0,1,2,\cdots,k)$, 满足 $\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}=0$; 当 $\overrightarrow{a_1}=(q^k,-1)$ 时, 存在 $\overrightarrow{a_2}=(1,q^k)\in Y$, 满足 $\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}=0$. 即 Z_{k+1} 具有性质 P.

综合 i)、ii) 可得, 由满足条件 P 的集合 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 所确定的数列 $\{x_n\}$ 的通项公式 $x_i=q^{i-1}$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$.

五、拓展研究

前面我们已经证明了, 当集合 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 满足条件 P, 且 $x_n>1$ 时, $x_1=1$, $x_i=x_2^{i-1}$ $(i=2,3,\cdots,n)$. 我们再作进一步的拓展研究.

研究1 按上述证明过程, 将有穷数列 $\{x_i\}$ 改变为无穷数列, 即当数集 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 时, 其他要件不变, 原试题的结论也成立.

研究2 如果没有"$x_n>1$"这个条件, 数列 $\{x_i\}$ 会有怎样的结构呢?

1. 因为 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$ 和 $1\in X$, 所以 $x_n<1$ 是不可能的.

2. 当 $x_n=1$ 时, 我们再进行一次"归纳、猜想、论证"的旅程.

(1) 归纳

对向量 $\overrightarrow{a_1}=(x_{n-1},x_n)$, 其中 $0<x_{n-1}<x_n=1$, 设存在向量 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)$ 满足 $sx_{n-1}+tx_n=0$. 若 $t=-1$, 则 $s=\dfrac{1}{x_{n-1}}>1$, 即 $s\notin X$; 若 $s=-1$, 则 $t=x_{n-1}\in X$, 即 $\overrightarrow{a_2}=(-1,x_{n-1})$. 记 $x_{n-1}=p<1$.

对向量 $\overrightarrow{a_1}=(x_{n-2},x_{n-1})=(x_{n-2},p)$, 设存在向量 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)$ 满足 $sx_{n-2}+tp=0$, 同理可求得 $\overrightarrow{a_2}=\left(-1,\dfrac{x_{n-2}}{p}\right)$, 因为 $\dfrac{x_{n-2}}{p}>x_{n-2}$, 要使 $\dfrac{x_{n-2}}{p}\in X$, 且 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$, 只可 $\dfrac{x_{n-2}}{p}=x_{n-1}=p$, 即 $x_{n-2}=p^2$.

对向量 $\overrightarrow{a_1}=(x_{n-3},x_{n-2})=(x_{n-3},p^2)$, 同理可求得 $\overrightarrow{a_2}=\left(-1,\dfrac{x_{n-3}}{p^2}\right)$, 因为 $\dfrac{x_{n-3}}{p^2}>x_{n-3}$, 所以只可 $\dfrac{x_{n-3}}{p^2}=p^2$ 或 $\dfrac{x_{n-3}}{p^2}=p$, 通过条件 P 的验证, 得 $x_{n-3}=p^3$.

(2) 猜想

对2012年两道解析几何高考试题根源的探究

312353 浙江省上虞市春晖中学 林国夫

试题1 (2012年全国高考安徽卷第20题) 如图1, 点$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$分别是椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点, 过点$F_1$作$x$轴的垂线交椭圆$C$的上半部分于点$P$, 过点$F_2$作直线$PF_2$的垂线交直线$x=\frac{a^2}{c}$于点$Q$.

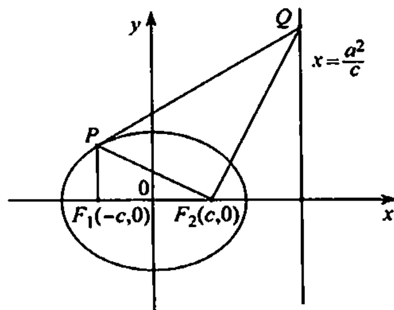


图1

(I) 如果点Q的坐标为$(4,4)$, 求此时椭圆C的方程;

(II) 证明: 直线PQ与椭圆C只有一个交点.

试题2 (2012年全国高考福建卷第19题) 如图2, 椭圆E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为点$F_1$, 右焦点为点$F_2$, 离心率$e=\frac{1}{2}$. 过点$F_1$的直线交椭圆$E$于$A$、$B$两点, 且$\triangle ABF_2$的周长为8.

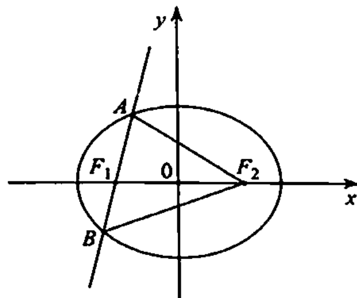


图2

(I) 求椭圆E的方程;

(II) 设动直线$l: y=kx+m$与椭圆E有且只有一个公共点P, 且与直线$x=4$相交于点Q. 试探究: 在坐标平面内是否存在定点M, 使得以PQ为直径的圆恒过点M? 若存在, 求出点M的坐标; 若不存在, 说明理由.

在$x_n=1$的情况下, 满足条件P的数集$X=\{-1,x_1,x_2,\cdots x_{n-1},x_n\}$具有如下结构:

$X=\{-1,p^{n-1},p^{n-2},\cdots,p^2,p,1\}$ $(0<p<1)$.

(3) 证明

1) 因为$0<p<1$, 所以$0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n$显然成立.

2) 对任意的$\vec{a_1}=(x_i,x_i)(i=1,2,\cdots,n)$, 存在$\vec{a_2}=(-1,1)\in Y$, 使$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=0$成立($\vec{a_1}=(-1,-1)$时也成立);

对任意的$\vec{a_1}=(-1,x_i)(i=1,2,\cdots,n)$, 存在$\vec{a_2}=(x_i,1)\in Y$, 使$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=0$成立;

对任意的$\vec{a_1}=(x_i,1)(i=1,2,\cdots,n)$, 存在$\vec{a_2}=(-1,x_i)\in Y$, 使$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=0$成立;

对任意的$\vec{a_1}=(x_i,x_j)=(p^{n-i},p^{n-j})$, 不妨设$1\leqslant i<j\leqslant n$, 取$\vec{a_2}=(-1,p^{j-i})$, 因为$1\leqslant j-i<n$, 所以$p^{j-i}\in X$, $\vec{a_2}=(-1,p^{j-i})\in Y$, 易验证$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=0$成立. 当$1\leqslant j<i\leqslant n$时, 同理得$\vec{a_2}=(p^{i-j},-1)$满足$\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}=0$.

由1)和2)可知, 在$x_n=1$的情况下, 满足条件P的数集$X=\{-1,p^{n-1},p^{n-2},\cdots,p^2,p,1\}(0<p<1)$.

笔者对上述两试题进行研究并通过几何画板的动态演示后发现, 两试题具有同一根源, 即椭圆切线的一个有趣性质. 下面笔者给出这一有趣性质.

1. 两试题命制的共同背景

定理　已知点$M(m,0)(0<|m|<a)$是椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$内一定点, P是椭圆C上的点, Q是直线$x=\frac{a^2}{m}$上的点(如图3). 记直线QM、PM的斜率为k_{QM}、k_{PM}, 则直线PQ为椭圆C的切线的充分必要条件为$k_{QM}\cdot k_{PM}=-\frac{b^2}{a^2-m^2}$.

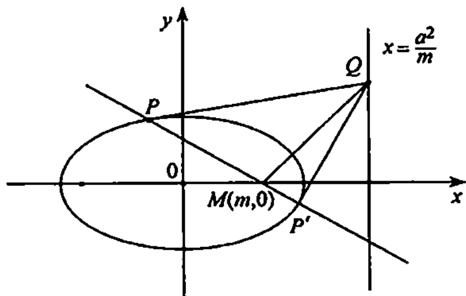


图3

证明必要性: 设直线PQ为椭圆C的切线, 过点Q作椭圆C的另一切线, 切点为P'.

设点Q的坐标为$\left(\frac{a^2}{m},t\right)$, 由文[1]得, 切点弦$PP'$的方程为$\frac{\frac{a^2}{m}}{a^2}x+\frac{t}{b^2}y=1$, 即$\frac{x}{m}+\frac{t}{b^2}y=1$. 可以验证此直线通过点$M$. 从而直线$PM$的斜率为$k_{PM}=-\frac{\frac{1}{m}}{\frac{t}{b^2}}=-\frac{b^2}{mt}$, 直线$QM$的斜率$k_{QM}=\frac{t}{\frac{a^2}{m}-m}=\frac{mt}{a^2-m^2}$, 故$k_{QM}\cdot k_{PM}=-\frac{b^2}{a^2-m^2}$, 证毕.

充分性: 我们知道椭圆C在点$P(x_0,y_0)$处的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 要证明直线$PQ$为椭圆$C$的切线, 只需证明直线$PQ$的斜率为$k_{PQ}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

由于直线PM的斜率$k_{PM}=\frac{y_0}{x_0-m}$, 且$k_{QM}\cdot k_{PM}=-\frac{b^2}{a^2-m^2}$, 故直线$QM$的斜率$k_{QM}=-\frac{b^2(x_0-m)}{y_0(a^2-m^2)}$, 直线$QM$方程为$y=-\frac{b^2(x_0-m)}{y_0(a^2-m^2)}(x-m)$, 令$x=\frac{a^2}{m}$, 解得$y=-\frac{b^2(x_0-m)}{my_0}$. 由此得点$Q$的坐标为$\left(\frac{a^2}{m},-\frac{b^2(x_0-m)}{my_0}\right)$, 考虑到点$P(x_0,y_0)$在椭圆$C$上, 即$y_0^2=b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$, 则直线$PQ$的斜率为$k_{PQ}=\frac{-\frac{b^2(x_0-m)}{my_0}-y_0}{\frac{a^2}{m}-x_0}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, 故直线$PQ$为椭圆$C$的切线, 证毕.

当上述定理中的M恰为椭圆C的焦点时, 我们即得如下推论:

推论　如图4, 已知F是椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的一个焦点, P是椭圆C上一点, Q是椭圆C上与点F相应的准线上一点. 则直线PQ为椭圆C的切线的充分必要条件为$PF\perp QF$.

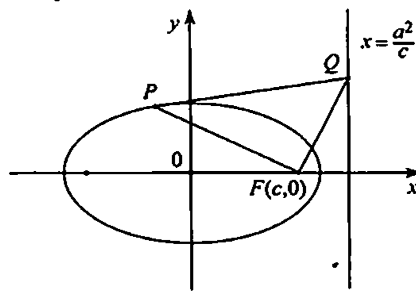


图4

2. 利用定理背景简解两试题

利用上述椭圆切线的性质, 我们就可以比较快速求解两试题, 下面给出简解.

试题1的解答: (I) 由于点$P\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$在椭圆$C$上, 故椭圆$C$在点$P$的切线方程为$\frac{-c}{a^2}x+\frac{\frac{b^2}{a}}{b^2}y=1$, 即$cx-ay+a^2=0$, 此即为直线$PQ$的方程. 由于点$Q(4,4)$在直线$PQ$和椭圆$C$的右准线上, 则$\begin{cases}4c-4a+a^2=0,\\ \frac{a^2}{c}=4,\end{cases}$ 解得

一道高考反射周期轨道问题的探究

314200 浙江省平湖中学 毛良忠

2012年高考已经落下帷幕，各省市的高考试题都努力体现了新课改理念，不在"难、偏"上考倒学生，更多地注重数学思想方法的考查，试题设计关注宽角度、多视点，有层次地考查学生的理性思维能力、对数学本质的理解能力和数学素养及潜能.

综观各省市的高考试题，均有考查学生能力的佳题，它们给广大师生研究、学习数学提供了很好素材. 下面就2012年全国卷(文科)最后一道选择题关于反射周期问题进行探究学习.

问题呈现：正方形$ABCD$的边长为1，点E在边AB上，点F在边BC上，$AE=BF=\frac{1}{3}$. 动点P从点E出发沿直线向点F运动，每当碰到正方形的边时反弹，反弹时反射角等于入射角，当点P第一次碰到点E时，点P与正方形的边碰撞的次数为( ).

(A) 8; (B) 6; (C) 4; (D)3.

在求解时，学生只要理解了动点碰到正方形的边反弹时所满足的条件，就可以动手作图得出答案(如图1)，不难得到6次碰撞后回到原出发点E. 这种探求结论的方法对于在高考时追求更快、更实效的考生来说应该是好的方法. 此题在作图时需要学生发现反射线其实是两组相互平行的线段，当然具体作图探求中需要学生准确并且要有一定的耐心.

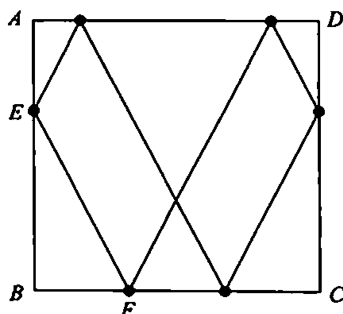


图1

如果将$AE=BF$的数值适当改变后情形又会怎样呢？全国卷理科中的第12题就是类似的一个碰撞问题：

已知正方形$ABCD$的边长为1，点E在边AB上，点F在边BC上，$AE=BF=\frac{3}{7}$. 动点P从点E出发沿直线向点F运动，每当碰到正方形的边时反弹，反弹时反射角等于入射角，当点P第一次碰到点E时，点P与正方形的边碰撞的次数为( ).

(A) 16; (B) 14; (C) 12; (D) 10.

$\begin{cases}a=2,\\c=1,\end{cases}$ 故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. (II) 的解答即为定理推论中的充分性.

试题2的解答：(I) 由于椭圆C的离心率为$e=\frac{1}{2}$, $4a=8$，故$a=2, c=1$，从而椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(II) 易知直线l是椭圆C在点P处的切线，点Q在椭圆C的右准线上，故由推论的必要性知，$PF_2\perp QF_2$. 从而以PQ为直径的圆经过椭圆C的右焦点$F_2(1,0)$. 即存在满足条件的定点M，其坐标为$(1,0)$.

参考文献

[1] 林国夫. 圆锥曲线中的切点弦及其方程[J]. 数学通讯(学生阅读), 2011(1): 42-45.

[2] 林国夫. 椭圆中精彩纷呈的"一点一线" [J]. 中学数学教学参考(上旬刊), 2011(4): 29-31.

单从选项就感觉此题不简单. 当然, 我们仍可以采用上面的作图方法得到答案B(如图2). 这样的一种操作方法其实更需要学生作图的准确性和耐心了.

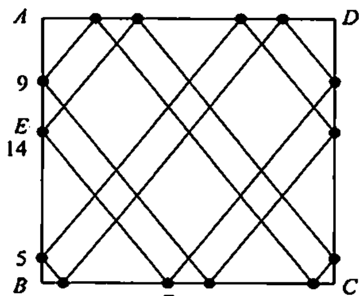


图2

面对这样一个来源于实际生活中的有趣数学问题, 我们能否用其他办法解决? 能否将问题更一般化呢?

如果我们将图2的连续碰撞的过程展开如图3, 图2中我们通过反射原理在正方形内作出了符合题意的反射图, 从图上我们发现动点P经过五次反射后第一次与边AB相碰, 经过九次反射后与边AB第二次相碰, 14次反射后与边AB原出发点E相碰. 也就是说原先一个正方形内的反射问题现在可以转化为在两条间距为一个单位的平行线之间的反射问题. 从作图角度看, 我们只要找到一条反射线与线段AB的交点, 并比较与边AB相交的位置就可以了. 这样的想法似乎比在同一个正方形内的反射问题要稍微简单一些.

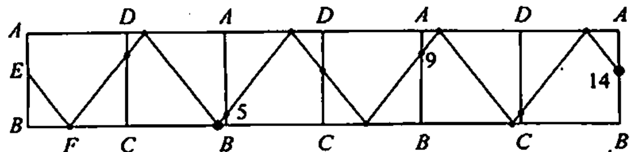


图3

能否用代数的方法来说理解释呢? 我们不妨建立如图4所示的平面直角坐标系, 观察反射路线应该是有周期性的, 并且可以用分段函数来表示.

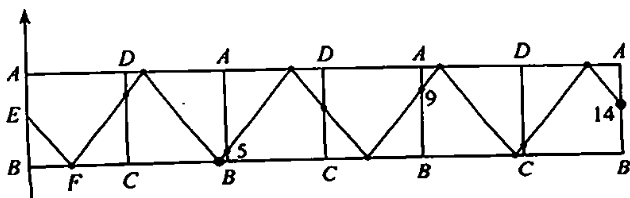


图4

不难得到函数表达式: $f(x)=$

$$\begin{cases}-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3n}{2}\right)+\frac{4}{7},\left(-\frac{9}{28}+\frac{3n}{2}<x\leqslant\frac{3}{7}+\frac{3n}{2}\right),\\ \frac{4}{3}\left(x-\frac{3n}{2}\right)-\frac{4}{7},\left(\frac{3}{7}+\frac{3n}{2}<x\leqslant\frac{33}{28}+\frac{3n}{2}\right),\end{cases}$$

$n\in\mathbf{N}$.

下面考查$f(x)$与$x=2k$, $k\in\mathbf{N}^*$的交点问题. 当$x=2$时, 因为$2\in\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{2},\frac{33}{28}+\frac{3}{2}\right]$, 所以$f(2)=\frac{4}{3}\left(2-\frac{3}{2}\right)-\frac{4}{7}=\frac{2}{21}$, 它表示与$AB$相碰时点$P$与$x$轴的距离; 当$x=4$时, 因为$4\in\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{2}\times2,\frac{33}{28}+\frac{3}{2}\times2\right]$, 所以$f(4)=\frac{4}{3}\left(4-\frac{3}{2}\times2\right)-\frac{4}{7}=\frac{16}{21}$; 当$x=6$时, 因为$6\in\left(-\frac{9}{28}+\frac{3}{2}\times4,\frac{3}{7}+\frac{3}{2}\times4\right]$, 所以$f(6)=-\frac{4}{3}\left(6-\frac{3}{2}\times4\right)+\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$.

因此动点P在第三次与边AB相碰, 恰与边AB初始出发点E相碰, 此时恰是FE的反射方向. 此时因$n=4$, 故动点与直线AD、BC各相碰4次, 又因当$x=6$时, $k=3$, 故动点P与AB、CD各相碰3次, 即当点P第一次碰到点E时, 点P与正方形的边碰撞的总次数为14次.

至此, 我们将一个几何碰撞问题转化为可求解的函数问题. 从上面函数求解的角度看, 代数方法似乎没有直接作图那么直观, 但代数表达的准确性为解决反射问题提供了强有力的理论依据(能否回到初始点在这个函数问题中关键是看能否存在如上所叙述的满足题意的整数解).

对于这类反射问题, 其实在2003年全国高考中也已经涉及到, 例如:

1. (2003年全国卷数学文科第11题) 已知长方形的四个顶点$A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$和$D(0,1)$, 一质点从边AB的中点P_0沿与AB夹角为θ的方向射到BC上的点P_1后, 依次反射到CD、DA和AB上的点P_2、P_3和P_4(入射角等于反射角). 若P_4与P_0重合, 则$\tan\theta$为( ).

(A) $\frac{1}{3}$; (B) $\frac{2}{5}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) 1.

2. (2003年全国卷数学理科第11题) 已知长方形的四个顶点$A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$

和$D(0,\ 1)$，一质点从边AB的中点P_0沿与AB的夹角θ的方向射到BC上的点P_1后，依次反射到CD、DA和AB上的点P_2、P_3和P_4(入射角等于反射角)，设P_4的坐标为$(x_4,\ 0)$，若$1<x_4<2$，则$\tan\theta$的取值范围是( ).

(A) $\left(\frac{1}{3},1\right)$; (B) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$;

(C) $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$; (D) $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right)$.

分析：我们利用刚才的反射展开图可以快速解决这两个问题. 对于问题1，如图5，$\tan\theta=\dfrac{P_2H}{\frac{P_0P_4}{2}}=\dfrac{2}{P_0P_4}=\dfrac{1}{2}$. 对于问题2，如图6，$\tan\theta=\dfrac{P_2H}{\frac{P_0P_4}{2}}=\tan\theta=\dfrac{2}{P_0P_4}$. 由于$1<x_4<2$，故$4<P_0P_4<5$，所以$\dfrac{2}{5}<\tan\theta=\dfrac{2}{P_0P_4}<\dfrac{1}{2}$.

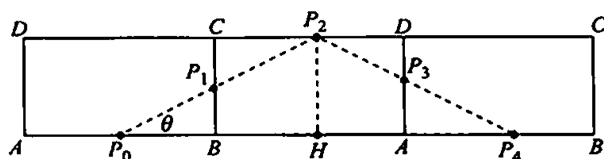


图5

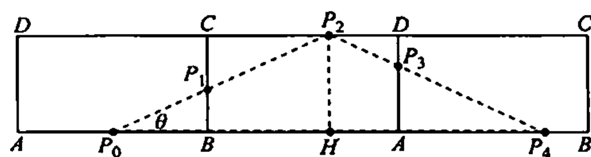


图6

在讨论图2的问题时，我们借助分段函数对问题进行了分析，在求解中总感觉分段函数的表达形式较难写，能否将问题更简洁明了些呢？回顾刚才的处理方法：我们先将正方形沿水平方向连续翻折摆放(即以纵向的边AB或DC被动点P碰到时作翻折)，使动点在两平行线间反射进而求解. 如果正方形的任意边被动点P碰到时都作翻折，那么这些正方形中的反射路线就摆成了一条直线(如图7).

这时很容易看出直线EF被AD、DC各碰撞3次，被AD、BC各碰撞4次，所求的碰撞次数为14.

对于这种翻折法，我们也可以建立一个合适的平面直角坐标系，因为直线EF的斜率为$-\frac{4}{3}$，所以容易检验动点P第14次的碰撞点是初始状态的E点.

上面的分析求解过程是令人满意的，探求过程真的给人赏心悦目之感受！能否将这个方法沿用到矩形的情形(见图5、图6). 结论是肯定的，不赘述.

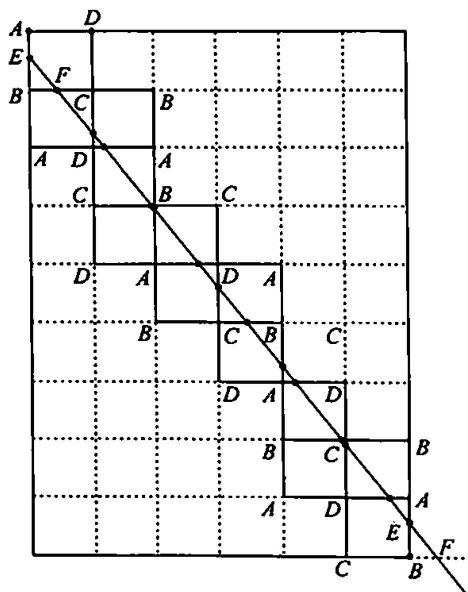


图7

经过探究可以发现，如果出发时的斜率是无理数，这条光线就永远不会回到出发点.

(上接第12-3页)

评析：“学然后知不足，教然后知困”，而这位教师是“教然后知不足”，即通过学生的生成，发现自己数学学科知识的不足. “知不足”后，须利用各种途径来弥补. 在课堂上把握时间，调动自己的个人数学知识，现场解决问题是其中的一个途径. 而在课后写教学后记，对自己教学中的成败得失进行反思，有助于积累丰富的教学经验，也有助于教师本体性知识的不断积累，不断提升.

参考文献

[1] 罗增儒. 中学数学课例分析[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2001.

圆系方程及其应用

830002 新疆生产建设兵团第二中学 张国治
835802 新疆伊犁新源县第八中学 张小燕

新课标数学必修2第109页A组第4题：已知直线$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$与$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$相交，证明方程$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0(\lambda\in\mathbf{R})$为过$l_1$与$l_2$交点的直线方程. 本命题简记为：$l_1+\lambda l_2=0$ $(\lambda\in\mathbf{R})$. 类比推理可以得：

已知$\odot C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$与$\odot C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$有公共点，则过其公共点的圆的方程为$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$ $(\lambda\in\mathbf{R}$且$\lambda\neq-1)$，…………………… (1)
简记为：$C_1+\lambda C_2=0$，证明详见文[1]. 特别地，当$\lambda=-1$时，上式为$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$，其表示两圆的相交弦或公切线所在的直线.

类似地：已知$\odot C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$与直线$l: Ax+By+C=0$有公共点，则过其公共点的圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0(\lambda\in\mathbf{R})$.
…………………………………… (2)

我们将上述(1)、(2)称为圆系方程. 恰当运用圆系方程解题有事半功倍之效，下面举例说明.

例1 (人教社数学2必修第133页第10题)求过点$M(2,-2)$以及圆$x^2+y^2-6x=0$与$x^2+y^2=4$交点的圆的方程.

解析：由圆系方程(1)，设所求方程为$x^2+y^2-6x+\lambda(x^2+y^2-4)=0(\lambda\in\mathbf{R}$且$\lambda\neq-1)$，将点$M(2,-2)$代入解得$\lambda=1$，故所求圆方程为$2x^2+2y^2-6x-4=0$，即$x^2+y^2-3x-2=0$.

例2 (2007年北京大学自主招生试题)求证：对任意实数k，$x^2+y^2-2kx-(2k+6)y-2k-31=0$恒过两个定点.

解析：由原方程得$x^2+y^2-6y-31-2k(x+y+1)=0$，易知$x^2+y^2-6y-31=0$表示圆，故由圆系方程(2)知原方程为过圆$x^2+y^2-6y-31=0$与直线$x+y+1=0$的公共点的圆系方程，联立解得$\begin{cases}x=2,\\y=-3,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-6,\\y=5,\end{cases}$即过两个定点$(2,-3)$、$(-6,5)$.

例3 (第14届希望杯竞赛题)求与圆$C: x^2+y^2-4x-8y+15=0$相切于点$P(3,6)$且过点$Q(5,6)$的圆的方程.

解析1：视点P为“点圆”，其方程为$(x-3)^2+(y-6)^2=0$. 由圆系方程(1)，设所求圆方程为$x^2+y^2-4x-8y+15+\lambda[(x-3)^2+(y-6)^2]=0$，将点$Q(5,6)$代入解得$\lambda=-2$，故所求圆方程为$x^2+y^2-8x-16y+75=0$.

解析2：视点P为点P处切线l退化点，则圆C在点P处的切线l方程为$3x+6y-4\times\dfrac{x+3}{2}-8\times\dfrac{y+6}{2}+15=0$，即$x+2y-15=0$. 依题意，所求圆过圆$C$与点$P$处的切线$l$的公共点$P$. 由圆系方程(2)，设所求圆方程为$x^2+y^2-4x-8y+15+\mu(x+2y-15)=0$，将点$Q(5,6)$代入解得$\mu=-4$，故所求圆方程为$x^2+y^2-8x-16y+75=0$.

点评：在圆系方程应用中，“点圆”常有事半功倍之效.

例4 (2009年全国高考湖北卷理科第14题)过原点O作圆$C: x^2+y^2-6x-8y+20=0$的两条切线，设切点分别为点P、Q，则线段PQ的长为______.

解析1：易知圆心$C(3,4)$，半径$r=\sqrt{5}$，且O、C、P、Q四点在以OC为直径的圆上，其方程为$x(x-3)+y(y-4)=0$，由圆系方程(1)可知直线PQ的方程为$(x^2+y^2-$

三角不等式的证明

——从用导数到不用导数

517139　广东省河源市连平县忠信中学　严文兰

430079　湖北省武汉华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心　彭翕成

微积分的初步知识目前已经下放到中学了, 高考也对这方面内容进行考查. 但由于微积分的掌握存在一定难度, 高中课时有限, 学生很难学得深入, 因此学生难免会对某些概念认识不清, 似懂非懂. 譬如要证"$x>0$时, $f(x)>0$", 学生乃至不少老师都会习惯性地去证"$f(0)\geqslant 0$且$f'(x)>0$", 却从没认真思考过两者之间的关系. 本文将以下述不等式为例, 阐述两者之间的关系. 在探究过程中, 我们发现对于不少问题都有一种有趣的现象, 和费马发现的无穷递降法一样, 不断递降, 直至最小数1. 利用这种方法, 我们证明了不少有难度的三角不等式.

$3x-4y)-(x^2+y^2-6x-8y+20)=0$, 即$3x+4y-20=0$, 则圆心$C(3,4)$到直线的距离$d=\dfrac{|3\times 3+4\times 4-20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$, 故由勾股定理得$|PQ|=2\sqrt{r^2-d^2}=4$.

解析2: 易知点P、Q在以点O为圆心, 以$|OP|=\sqrt{|OC|^2-r^2}=2\sqrt{5}$为半径的圆上, 此时圆$O: x^2+y^2=20$, 由圆系方程(1)可知直线$PQ$的方程为$x^2+y^2-20-(x^2+y^2-6x-8y+20)=0$, 即$3x+4y-20=0$, 以下同解法1.

点评: 此题关键是构造一个过点P、Q的圆, 然后利用圆系方程求出其公共弦PQ所在直线方程.

例5　已知圆$C: x^2+y^2-2x+4y-4=0$. 是否存在斜率为1的直线l被圆C截得的弦为AB, 使得$OA\perp OB$ (O为原点)? 若存在, 试求直线l的方程; 若不存在, 说明理由.

解析: 假设存在符合题意的直线$l: y=x+b$, 依题意$OA\perp OB\iff$以AB为直径的圆过原点. 由圆系方程(2), 设以AB为直径的圆的方程为$x^2+y^2-2x+4y-4+\lambda(x-y+b)=0$, 即$x^2+y^2+(\lambda-2)x+(4-\lambda)y+\lambda b-4=0$, 其圆心为$\left(1-\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{\lambda}{2}-2\right)$. 由题意知点$O$在此圆上, 且圆心在直线$l$上, 即$\begin{cases}\lambda b-4=0,\\ \dfrac{\lambda}{2}-2=1-\dfrac{\lambda}{2}+b.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b=1,\\ \lambda=4,\end{cases}$ 或$\begin{cases}b=-4,\\ \lambda=-1.\end{cases}$ 所以直线l存在, 其方程为$x-y+1=0$或$x-y-4=0$.

点评: 不难发现运用圆系方程解题有事半功倍之效, 类比不难得到过点$A(x_1,x_2)$、$B(x_2,y_2)$的圆系可视为以AB为直径的圆与直线AB有公共点的圆系, 其方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda[(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)]=0.$$

例6　(人教社数学2必修第122页例题4) 求过三点$O(0,0)$、$M_1(1,1)$、$M_2(4,2)$的圆的方程.

解析: 过点O、M_1的圆系方程为$x(x-1)+y(y-1)+\lambda(x-y)=0$, 将点$M_2(4,2)$代入解得$\lambda=-7$, 故所求圆方程为$x^2+y^2-8x+6y=0$.

参考文献

[1] 葛海燕. 困惑、探究、明理、延伸—由圆系方程想到的探究[J]. 数学教学, 2006(5): 30-31.

探究原题 $x>0$, 求证: $(2+\cos x)x>3\sin x$.

最简单的思路是: 设 $f(x)=(2+\cos x)x-3\sin x$, $f'(x)=-x\sin x-2\cos x+2$, 如何证 $-x\sin x-2\cos x+2>0$ 让人头疼. 如图1, 发现 $-x\sin x-2\cos x+2$ 是可能小于0的. 是不是题目出错了呢? 观察了 $f(x)=(2+\cos x)x-3\sin x$ 的图像(图2), 发现题目没有问题.

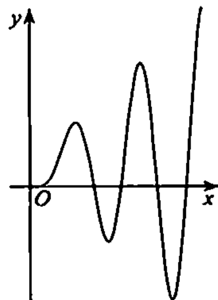


图1



图2

这就说明了: "$f(0)\geqslant 0$ 且 $f'(x)>0$"是"$x>0$时, $f(x)>0$"的充分不必要条件. 也就是说此处的 $f'(x)=-x\sin x-2\cos x+2$ 不一定非要大于0才行, 因为 $f(x)=(2+\cos x)x-3\sin x$ 是有起伏的, 并不是严格递增.

图像能够给证明带来启发, 从图像上可以看出: 离 y 轴较近时, 函数 $f(x)=(2+\cos x)x-3\sin x$ 的图像靠近 x 轴, 需细致处理; 而离 y 轴较远时, 则可以粗略地放缩.

证法1: 记 $g(x)=-x\sin x-2\cos x+2$, 则 $g'(x)=\sin x-x\cos x$. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$ 时, $g'(x)=\cos x(\tan x-x)>0$; 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $g'(x)=1$; 综合得当 $0<x\leqslant\pi$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)>g(0)=0$, 即当 $0<x\leqslant\pi$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)>f(0)=0$; 当 $\pi<x$ 时, $f(x)>1\cdot\pi-3\sin x>0$.

综合得当 $x>0$ 时, $(2+\cos x)x>3\sin x$.

证法1需要分段讨论. 如果稍微改变一下题目形式, 用一个看似只是初等数学的小技巧, 却能得到一个无需讨论的证法2.

证法2: 记 $f(x)=x-\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$, 则 $f'(x)=\dfrac{4\sin^4\left(\dfrac{x}{2}\right)}{(\cos x+2)^2}$. 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)>f(0)=0$, 即当 $x>0$ 时, $(2+\cos x)x>3\sin x$.

从图3来看, $x-\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$ 单调递增, 不是起伏的. 证法2之所以如此简洁, 其关键是将变量 x 与三角函数分离开来, 变形看似简单, 实则是用导数简化证明的重要技巧.

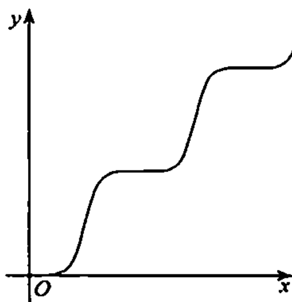


图3

以上两种证法都运用了导数, 那么, 不用导数能否证明这个不等式呢? 经过探索, 得到了下面证法.

证法3: 当 $0<x<\pi$ 时, 记 $f(x)=\dfrac{(2+\cos x)x}{3\sin x}$, 从而 $f(x)>0$.

记 $t=\dfrac{x}{2}$, $\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{x}{2}\right)}=\dfrac{1+2\cos^2 t}{2\cos t+\cos^2 t}>1$ $\Longleftrightarrow(\cos t-1)^2>0$, 则 $f(x)>f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, 故当 $n\to\infty$, $\dfrac{x}{2^n}\to 0$ 时, $f(x)>f\left(\dfrac{x}{2}\right)>\cdots>f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=\dfrac{\left(2+\cos\dfrac{x}{2^n}\right)\dfrac{x}{2^n}}{3\sin\dfrac{x}{2^n}}\to 1$. 于是 $f(x)>1$, $(2+\cos x)x>3\sin x$. 而当 $x\geqslant\pi$ 时, $(2+\cos x)x>1\cdot\pi>3\sin x$.

因此当 $x>0$ 时, $(2+\cos x)x>3\sin x$.

证法3中, 用到了 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 这一重要极限, 这一公式是大学数学的入门内容, 高中生也比较容易理解和接受. 可先用面积法证明 $\sin x<x<\tan x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 变形得 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 同样也有 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\text{且}x\neq 0\right)$, 当 $x\to 0$, 由于两边趋于1, 即得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 这样的说理虽不是很严谨, 但也还算直观好懂.

利用证法3中的递降证法，可以证明许多三角不等式．这些不等式在以往看来，都必须用到较多的微积分知识．

命题1 证明$\sin x > x-\dfrac{x^3}{6}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$．

证明：先证$\cos x > 1-\dfrac{x^2}{2}(0<x<\pi)$，

$$\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2} > 1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1-\frac{x^2}{2}.$$

记$f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\dfrac{x^3}{6}}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$t=\dfrac{x}{2}$，

则$0<t<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{x}{2}\right)}=\dfrac{\cos t\cdot(6-t^2)}{6-4t^2}>1 \Longleftrightarrow$

$\cos t > \dfrac{6-4t^2}{6-t^2}$，只需证$1-\dfrac{t^2}{2}>\dfrac{6-4t^2}{6-t^2}$，即证$\dfrac{t^4}{2}>0$ 此不等式成立，所以$f(x)>f\left(\dfrac{x}{2}\right)$，故当$n\to\infty$，$\dfrac{x}{2^n}\to 0$，$f(x)>f\left(\dfrac{x}{2}\right)>\cdots>$

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\frac{1}{1-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2}\to 1,$$

所以$f(x)>1$，即原不等式成立．

推论1 证明$\cos x<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}(0<x<\pi)$．

证明：$\cos x = 1-2\sin^2\dfrac{x}{2}<1-2\left[\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\right]^2=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{1152}<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$．

推论2 证明$\tan x > x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{8}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$．

证明：$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}>\dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}}$，只需证$\dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}}>x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{8}$，等价于$x^7(28-3x^2)>0$，当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$x^7(28-3x^2)>0$，故原不等式成立．

把不等式$f(x)>1$化为$f(x)>f\left(\dfrac{x}{2}\right)$与$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$（当然也可以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\geqslant 1$），这是一种证明三角不等式的强有力的方法，接下来用此法再证2个高难度的不等式．

命题2 $\tan x\cdot\sin^2 x>x^3\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$．

证明：记$f(x)=\dfrac{\tan x\cdot\sin^2 x}{x^3}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$f(x)=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}{x^3},$$

故$\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{x}{2}\right)}=\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)\left(1-\tan^2\dfrac{x}{2}\right)}=\dfrac{1}{1-\tan^4\dfrac{x}{2}}>1$，$f(x)>f\left(\dfrac{x}{2}\right)$．

当$n\to\infty$，$\dfrac{x}{2^n}\to 0$，$f(x)>f\left(\dfrac{x}{2}\right)>\cdots>$

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\left(\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right)^3\frac{1}{\cos\frac{x}{2^n}}\to 1,$$

所以$f(x)>1$，即原不等式成立．

命题3 $\tan x>\dfrac{3x}{3-x^2}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$．

证明：记$f(x)=\dfrac{3-x^2}{3x}\tan x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$t=\dfrac{x}{2}$，则$\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{x}{2}\right)}=\dfrac{3-4t^2}{3-t^2}\dfrac{1}{1-\tan^2 t}>1\Longleftrightarrow$

$\tan^2 t>\dfrac{3t^2}{3-t^2}$，由推论2只需证$\left(t+\dfrac{t^3}{3}\right)^2>\dfrac{3t^2}{3-t^2}$，等价于$\dfrac{t^4(9-3t^2-t^4)}{3-t^2}>0$，由于$t=\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{4}<1$，此不等式成立，所以$f(x)>f\left(\dfrac{x}{2}\right)$．

故当$n\to\infty$，$\dfrac{x}{2^n}\to 0$，$f(x)>f\left(\dfrac{x}{2}\right)>\cdots>f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=\dfrac{3-\left(\dfrac{x}{2^n}\right)^2}{3\cos\dfrac{x}{2^n}}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\to 1$，所以$f(x)>1$，即原不等式成立．

上述这些不等式，习惯上好像非得用较多的微积分知识不可，譬如命题1和推论1，看似

（下转封底）

从直观理解中找到解决问题的方法

200062 上海市曹杨二中 黄 坪

2012年上海高考已落下帷幕, 大家感觉今年的理科卷比往年难了一些, 难在填空题的后三道、选择题的后两道和解答题的最后一道, 五道题共40分, 其他110分均为常规题. 对一些较难的题, 有的学生甚至不理解题意, 因此找不到解决这些问题的基本方法. 数学强调逻辑推理, 但在逻辑推理之前对起始问题的直观认识, 又往往是数学解题不可或缺的前提条件. 如果我们能从复杂和抽象的数学问题中找到直观理解的"点", 或许就可以找到解决这个问题的"方向". 下面结合今年上海高考理科卷的较难试题, 来看直观能力对数学问题求解的重要性.

一、画出直观图形, 求出数量关系

第13题: 已知函数 $y=f(x)$ 的图像是折线段 ABC, 其中 $A(0,0)$、$B\left(\frac{1}{2},5\right)$、$C(1,0)$, 函数 $y=xf(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的图像与 x 轴围成的图形的面积为____.

分析:

·折线 ABC 函数:

$$y=f(x)=\begin{cases}10x, 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ -10x+10, \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$$

二次分段函数 $y=xf(x)=$

$$\begin{cases}10x^2, 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ -10x^2+10x, \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

折线函数中一次项系数相反, 说明两线段的斜率相反, 图形具有对称性, 二次函数中二次项系数相反, 说明抛物线的开口方向相反, 大小相同. 画出二次函数的直观图形(图1).

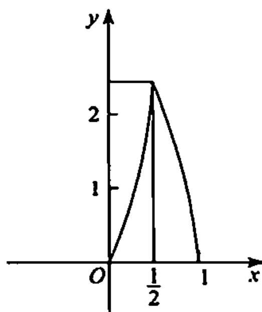


图1

函数与 x 轴围成一个曲边三角形, 利用图形全等和补形的方法, 得到

这个曲边三角形的面积相当于一个矩形的面积, 故所求面积为 $\frac{5}{4}$.

第14题: 如图2, AD 与 BC 是四面体 $ABCD$ 中互相垂直的棱, $BC=2$, 若 $AD=2c$, 且 $AB+BD=AC+CD=2a$, 其中 a、c 为常数, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值是____.

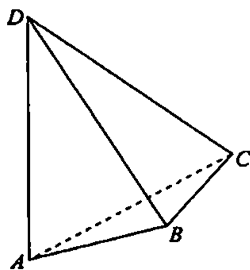


图2

分析:

由 $AD\perp BC$, 则过 BC 作一截面交 AD 于点 O, 因为 $AB+BD=2a$ (常数), 所以它的轨迹是一个以点 A、D 为焦点、长轴长为 $2a$ 的椭圆, 椭圆上的动点 B 到长轴的距离取得最大值, 点 B 应在短轴顶点处, 此时 $AB=BD=a$.

同样点 C 也在短轴顶点处, 此时 $AC=CD=a$.

所以点O为AD的中点(图3), 最大体积为

$$V_{ABCD}=\frac{2c}{3}S_{\triangle OBC}=\frac{2c}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{a^2-c^2-1}=\frac{2c}{3}\sqrt{a^2-c^2-1}.$$

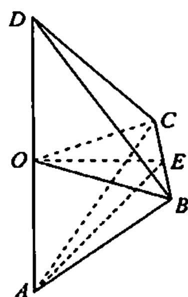


图3

二、直观理解在前, 逻辑推证在后

第18题: 设$a_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{25}$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 在$S_1,S_2,\cdots,S_{100}$中, 正数的个数是( )

A. 25; B. 50; C. 75; D. 100.

分析:

数列$b_n=\sin\frac{n\pi}{25}$, 最小正周期是50.

数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的第1项到第24项、第51项到第74项均为正的, 第25项、50项、75项、100项为0, 第26项到第49项、第76项到第99项均为负的.

易知S_1, S_2, $\cdots$, S_{25}均为正数.

因为$b_i=-b_{25+i}(i=1,2,\cdots,25,51)$, 所以$a_i+a_{25+i}=\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{25+i}\right)b_i>0$. 于是, $S_{25+i}=(a_1+a_{26})+(a_2+a_{27})+\cdots+(a_i+a_{25+i})+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{25}>0$, 即$S_{26},S_{27},\cdots,S_{50}$均为正数.

类似地, 因为$a_{51},a_{52},\cdots,a_{75}$为非负数, 所以$S_{51},S_{52},\cdots,S_{75}$均为正数.

因为$b_{75+i}=-b_{50+i}(i=1,2,\cdots,25)$, 所以$a_{50+i}+a_{75+i}=\left(\frac{1}{50+i}-\frac{1}{75+i}\right)b_{50+i}>0$, 于是, $S_{75+i}=S_{50}+(a_{51}+a_{76})+(a_{52}+a_{77})+\cdots+(a_{50+i}+a_{75+i})+a_{50+i+1}+a_{50+i+2}+\cdots+a_{75}>0$, 即$S_{76},S_{77},\cdots,S_{100}$均为正数.

所以$S_1,S_2,\cdots,S_{100}$均为正, 选(D).

本题的"直观理解点", 也是问题求解的关键点, 即数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的周期性和单调性.

如果认识到了数列直观的一面, 那么逻辑求解是不困难的. 解题的思路是直观判断在前, 逻辑推证在后, 有了直观的预判, 结论的推证也就成了顺理成章的事了.

第17题: 设$10\leqslant x_1<x_2<x_3<x_4\leqslant 10^4$, $x_5=10^5$, 随机变量ξ_1取值x_1、x_2、x_3、x_4、x_5的概率均为0.2, 随机变量ξ_2取值$\frac{x_1+x_2}{2}$、$\frac{x_2+x_3}{2}$、$\frac{x_3+x_4}{2}$、$\frac{x_4+x_5}{2}$、$\frac{x_5+x_1}{2}$的概率也均为0.2, 若记$D\xi_1$、$D\xi_2$分别为ξ_1、ξ_2的方差, 则( )

A. $D\xi_1>D\xi_2$;

B. $D\xi_1=D\xi_2$;

C. $D\xi_1<D\xi_2$;

D. $D\xi_1$与$D\xi_2$的大小关系与x_1、x_2、x_3、x_4的取值有关.

分析:

第一组五个数出现的概率均相等, 说明五个数的数学期望就是这五个数的平均数; 第二组五个数出现的概率均相等, 说明五个数的数学期望也是这五个数的平均数. 两组数据的平均数相等, 现在要比较它们方差的大小. 第一组是从小到大排列的五个原始数据, 第二组是取中点后的数据.

"直观理解点": 第二组数据与平均数的偏差要小一些, 见图4.

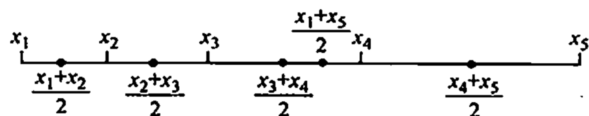


图4

因此, 猜想(A)是正确的.

我们还可以借助计算器来验证上面的猜想:

不妨取第一组数据为: 10, 100, 1000, 10000, 100000. 则第二组数据为5+50, 50+500, 500+5000, 5000+50000, 50000+5. 很快得到正确选择为(A).

二、提高直观能力, 优化解题思路

第12题: 在平行四边形$ABCD$中, $\angle A=\frac{\pi}{3}$, 边AB、AD的长分别为2、1, 若M、N分

对一道高考适应性考试题的研究

100071 北京丰台二中 甘志国

华中师范大学第一附属中学2012届高考适应性考试数学(理科)试题的第10题是:

题1 若定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$, 其图像是连续不断的, 且存在常数λ ($\lambda\in\mathbf{R}$)使得$f(x+\lambda)+\lambda f(x)=0$对任意的实数$x$都成立, 则称$f(x)$是一个$\lambda-$伴随函数. 有下列关于"$\lambda-$伴随函数"的结论: ①$f(x)=0$是常数函数中唯一一个"$\lambda-$伴随函数"; ②$f(x)=x$不是"$\lambda-$伴随函数"; ③$f(x)=x^2$是"$\lambda-$伴随函数"; ④"$\frac{1}{2}-$伴随函数"至少有一个零点. 其中正确结论的个数是 ……………………( )

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(答案: (B), ②④正确.)

笔者研究了题1, 由此编拟出了一道内涵更丰富的类题, 供读者欣赏:

题2 若定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$, 其图像是连续不断的, 且存在常数λ ($\lambda\in\mathbf{R}$)使得$f(x+\lambda)+\lambda f(x)=0$对任意的实数$x$都成立, 则称$f(x)$是一个$\lambda-$伴随函数.

(1) 求出所有的多项式函数$f(x)$(即函数$f(x)$的解析式是x的多项式)及对应的λ, 使$f(x)$是$\lambda-$伴随函数;

(2) 若函数$f(x)$是$\lambda-$伴随函数($\lambda>0$), 求函数$f(x)$零点的个数.

解: (1) 读者容易证明: 常数函数$f(x)$均是$\lambda-$伴随函数, 且对应的$\lambda=-1$ (当$f(x)=0$时, λ可以是任意常数).

下面再来证明: n ($n\in\mathbf{N}^*$)次多项式函数$f(x)$均不是$\lambda-$伴随函数.

可设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq0)$.

假设存在常数$\lambda(\lambda\in\mathbf{R})$使得$f(x)$是$\lambda-$伴随函数, 即$f(x+\lambda)+\lambda f(x)=0$对任意的实数$x$都成立, 得

(下转第12-30页)

别是边BC、CD上的点, 且满足$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的取值范围是____.

分析:

若试图直接表示出各点的坐标, 用坐标法来求数量积是困难的, 由于所求两个向量的长度大小和夹角都在变, 用投影公式求数量积也是困难的.

根据平面向量的分解定理, 设$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$, 则

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}(0\leqslant t\leqslant1)$(见图5),

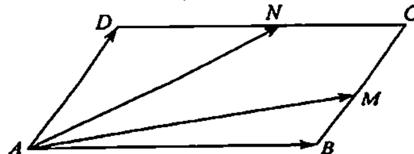


图5

$\overrightarrow{AN}=(1-t)\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$.

因为$\overrightarrow{a}^2=4$, $\overrightarrow{b}^2=1$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$, 所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=-(t+1)^2+6\in[2,5]$.

本题求解中的直观能力是找到所求数量积的一个中途转化点, 即所求向量先用两个不平行的基向量来表示, 这一关键步骤在求解中起到了至关重要的作用. 如果具有了这种直观能力, 本题的运算就变得简单了.

数学问题具有抽象、隐含和综合的特征, 赋抽象以具体, 化隐含为显现, 变综合为单一, 借助图像的直观或进行直观的理解, 解决问题的思路就有了强有力的支撑, 在形成学生抽象思维能力之前, 我们首先要着力培养学生的数学直观能力, 从而让学生感到数学问题原本并不那么困难, 直观背后"不可理喻"的数学求解原来也是那么"平易近人"和"善解人意"。

善构不等式破解方程难题

311121 浙江杭州英特外国语学校 孙志东

我们知道, 当方程 (组) 的未知数个数多于方程的个数时, 方程 (组) 往往有无数组解. 但是对于某些特定的方程 (组), 可能只有有限组解. 本文将对借助于不等式求解的这些特定方程进行研究.

一、利用不等式最值成立条件

例 1 已知 x、y 满足 $(x^2+2x+3)(3y^2+2y+1)=\frac{4}{3}$, 求 $x+y$ 的值.

解: 由于 $(x^2+2x+3)=(x+1)^2+2\geqslant 2$, $(3y^2+2y+1)=3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\geqslant\frac{2}{3}$, 从而得到 $(x^2+2x+3)(3y^2+2y+1)\geqslant\frac{4}{3}$, 只有当 $(x^2+2x+3)=2$, $(3y^2+2y+1)=\frac{2}{3}$, 即 $x=-1, y=-\frac{1}{3}$ 时, $(x^2+2x+3)(3y^2+2y+1)=\frac{4}{3}$, 所以 $x+y=-\frac{4}{3}$.

评注: 本例将 x^2+2x+3 与 $3y^2+2y+1$ 这两个多项式分别配方后, 各自求出最小值, 由于两个最小值的积恰好等于已知方程右边的常数 $\frac{4}{3}$, 因此可以得出当且仅当 x^2+2x+3 与 $3y^2+2y+1$ 同时取得最小值时已知方程才成立. 这样就获得了方程的解.

例 2 解方程组 $\begin{cases}x+y+z=3,\\x^2+y^2+z^2=3.\end{cases}$

解: 由已知条件得

$$\frac{x+y+z}{3}=\frac{x^2+y^2+z^2}{3}=1,$$

从而得

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=1=\frac{x+y+z}{3},$$

根据均值不等式

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\geqslant\frac{x+y+z}{3},$$

当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立. 故 $x=y=z=1$.

评注: 本例解答中利用的是均值不等式后出现的常数 1, 恰好为 $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ 的最小值, 从而获得了方程的解.

二、借助于一元二次方程的判别式 $\Delta\geqslant 0$

例 3 已知 $5x^2+2y^2+2xy-14x-10y+17=0$, 求实数 x、y 的值.

分析: 此方程为二元二次方程, 按常规方法难以入手, 不妨将其看成关于 x 的一元二次方程, 利用 $\Delta\geqslant 0$ 构建关于 y 的不等式, 通过特殊不等式成立的条件来解方程.

解: 把 $5x^2+2y^2+2xy-14x-10y+17=0$ 看成关于 x 的一元二次方程, 得 $5x^2+(2y-14)x+2y^2-10y+17=0$, 因为 x、y 均为实数, 所以 $\Delta=(2y-14)^2-4\times5(2y^2-10y+17)\geqslant 0$, 整理得 $y^2-4y+4\leqslant 0$, 即 $(y-2)^2\leqslant 0$, 因此 $y=2$, 代入原方程得 $x=1$.

例 4 满足方程 $y^4+2x^4+1=4x^2y$ 的所有整数对 $(x,y)=$____. (1996 年江苏省数学竞赛)

分析: 此方程为二元四次方程, 属于二元高次方程, 可把它看成关于 x^2 的一元二次方程, 再根据 $\Delta\geqslant 0$ 建立不等式, 获得方程的解.

解: 原方程可化为 $2x^4-4yx^2+y^4+1=0$, 把 x^2 看成未知数, 则 $\Delta=(-4y)^2-4\times2(y^4+1)=-8(y^2-1)^2\geqslant 0$, 这样 $(y^2-1)^2\leqslant 0$, 从而 $y=\pm1$. 当 $y=-1$ 时, 方程 $x^2=-1$ 无实数解; 当 $y=1$ 时, $x^2=1$, 即 $x=\pm1$. 所以 $(x,y)=(1,1)$ 或 $(-1,1)$.

例 5 已知实数 a、b、c 满足 $a+b+2c=1$, $a^2+b^2+6c+\frac{3}{2}=0$, 求 a、b、c 的值.

解: 由 $a+b+2c=1$, 得 $a+b=1-2c$, 代入 $a^2+b^2+6c+\frac{3}{2}=0$ 得 $ab=2c^2+c+\frac{5}{4}$,

(下转第12-26页)

对"一类取值范围问题的解法思考"的思考

453000 河南师范大学附属中学 陈百华

文[1]对不等式恒成立求参数取值范围的两种方法进行了探讨，并指出这两种方法对于一些常规的、不太复杂的题目是行之有效的. 但是正如文[1]所说，用这两种方法来处理2010年的几道高考题遇到了困难，要么计算过程繁琐，从而半途而废，要么很难解决，陷入死胡同. 究其原因是这两种方法过于重视方法化和程序化，也正恰恰因为这两种方法具有方法明朗、思路简单、容易操作的鲜明特点，给学生造成了一种思维定势，束缚了学生的思维，致使文[1]没有找到有效的破解方法，对标准答案的评价只能说是很难想到，采用的仍然是分离参数法，然后利用洛必达法则求极限. 洛必达法则毕竟是高等数学的内容，并不要求中学生掌握，关于如何用洛必达法则解这类题，文[2]有更详细的叙述.

其实，从2006年开始，每年的高考卷都有类似的题目，笔者研究发现这些题目都有一个共同的特点：不等式中等号成立的条件恰好是所给区间的某个端点值，有了这个信息，就找到破解这类问题的有效途径，个别高考题的标准答案也正是围绕这个信息展开讨论的. 本文就以文[1]的三道例题和2012年全国高考大纲卷第20题为例来阐述这种方法.

例1 (2010年全国高考新课标卷理科第21题) 设函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$.

(Ⅰ) 若 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ) 若当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

分析：(Ⅱ) 由于 $f(0)=0$，若有 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是增函数，则可使 $f(x)\geqslant 0$，即当 $x\geqslant 0$ 时，使 $f'(x)\geqslant 0$ 成立则可. 因为 $f'(x)=e^x-1-2ax$，且 $f'(0)=0$，所以若有 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是增函数，即当 $x\geqslant 0$ 时，使 $f''(x)\geqslant 0$ 成立则可. 因为 $f''(x)=e^x-2a$，且当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant 1$，所以 $f''(x)=e^x-2a\geqslant 1-2a$，令 $1-2a\geqslant 0$ 得 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

按上述分析可知，$a\leqslant\frac{1}{2}$ 是原命题的充分条件，所以还需要说明 $a>\frac{1}{2}$ 时 $f(x)\geqslant 0$ 不成立，即存在 x 使 $f(x)<0$ 成立. 令 $f''(x)=e^x-2a<0$ 得 $x<\ln 2a$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 是减函数，因此有 $f'(x)<f'(0)=0$，于是 $f(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 是减函数，故 $f(x)<f(0)=0$，这与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾. 综上得 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

例2 (2010年全国高考湖北卷理科第21题) 已知函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}+c(a>0)$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

(Ⅰ) 用 a 表示出 b、c;

(Ⅱ) 若 $f(x)\geqslant\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

分析：(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $b=a-1$, $c=1-2a$, $f(x)=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a$，令 $g(x)=f(x)-\ln x=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a-\ln x$，则不等式 $f(x)\geqslant\ln x$ 可化为 $g(x)\geqslant 0$. 由于 $g(1)=0$，若有 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 是增函数，则可使 $g(x)\geqslant 0$，即当 $x\geqslant 1$ 时，使 $g'(x)\geqslant 0$ 成立则可. 因为 $g'(x)=\frac{ax^2-x-(a-1)}{x^2}$，令 $h(x)=ax^2-x-(a-1)$，由于 $h(1)=0$，所以若有 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 是增函数，即当 $x\geqslant 1$ 时，使 $h'(x)\geqslant 0$ 成立则可，因为 $h'(x)=2ax-1$，当 $x\geqslant 1$ 时，$h'(x)=2ax-1\geqslant 2a-1$，令 $2a-1\geqslant 0$ 得 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

接下来要说明当 $a<\frac{1}{2}$ 时 $g(x)\geqslant 0$ 不成

立, 即存在 x 使 $g(x)<0$. 令 $h'(x)=2ax-1<0$ 得 $x<\frac{1}{2a}$, 当 $1<x<\frac{1}{2a}$ 时, $h(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{2a}\right)$ 是减函数, 因此有 $h(x)<h(1)=0$, 即 $g'(x)<0$, 于是 $g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{2a}\right)$ 是减函数, 故 $g(x)<g(1)=0$, 这与 $g(x)\geqslant 0$ 矛盾. 综上, 得 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

例3 (2010年全国高考全国卷 II 理科第22题) 设函数 $f(x)=1-e^{-x}$.

(I) 证明: 当 $x>-1$ 时, $f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$;

(II) 设当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$, 求 a 的取值范围.

分析: (II) 当 $x\geqslant 0$ 时, 有 $0<e^{-x}\leqslant 1$ 成立, 所以 $f(x)\geqslant 0$, 由不等式 $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$ 得 $\frac{x}{ax+1}>0$. 若 $a<0$, 则当 $x>-\frac{1}{a}$ 时, 有 $\frac{x}{ax+1}<0$, 与 $\frac{x}{ax+1}>0$ 矛盾. 故有 $a\geqslant 0$, 此时 $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$ 可化为 $axe^x-xe^x+e^x-ax-1\leqslant 0$.

令 $g(x)=axe^x-xe^x+e^x-ax-1$, 则不等式 $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$ 可化为 $g(x)\leqslant 0$. 由于 $g(0)=0$, 所以若有 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是减函数, 即当 $x\geqslant 0$ 时, 有 $g'(x)\leqslant 0$ 成立则可. 而 $g'(x)=ae^x+axe^x-xe^x-a$, 由于 $g'(0)=0$, 所以若有 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是减函数, 即当 $x\geqslant 0$ 时, 有 $g''(x)\leqslant 0$ 成立则可. 而 $g''(x)=(ax-x+2a-1)e^x=[(a-1)x+(2a-1)]e^x$, 所以令 $\begin{cases}a-1\leqslant 0,\\2a-1\leqslant 0,\end{cases}$ 又因为 $a\geqslant 0$, 因此 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

接下来要说明当 $a>\frac{1}{2}$ 时 $g(x)\leqslant 0$ 不成立, 即存在 x 使 $g(x)>0$. 可以分两种情况讨论: 当 $a\geqslant 1$ 时, 有 $(a-1)x+(2a-1)>0$ 成立, 又 $e^x>0$, 所以在 $(0,+\infty)$ 恒有 $g''(x)>0$, 即 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数, 故 $g'(x)>g'(0)=0$, 于是 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数, $g(x)>g(0)=0$, 这与 $g(x)\leqslant 0$ 矛盾.

当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时, 可推得当 $0<x<\frac{2a-1}{1-a}$ 时 $g''(x)>0$, $g'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{2a-1}{1-a}\right)$ 是增函数, 当 $x\in\left(0,\frac{2a-1}{1-a}\right)$ 时, 有 $g'(x)>g'(0)=0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{2a-1}{1-a}\right)$ 是增函数, 因此有 $g(x)>g(0)=0$, 这与 $g(x)\leqslant 0$ 矛盾. 综上 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

例4 (2012年全国高考全国大纲卷第20题) 设函数 $f(x)=ax+\cos x$, $x\in[0,\pi]$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 设 $f(x)\leqslant 1+\sin x$, 求 a 的取值范围.

分析: (II) 令 $g(x)=ax+\cos x-1-\sin x$, 则不等式 $f(x)\leqslant 1+\sin x$ 可化为 $g(x)\leqslant 0$. 由于 $g(0)=0$, 所以若当 $g(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 是减函数, 即当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时, 有 $g'(x)\leqslant 0$ 则可. $g'(x)=a-\sin x-\cos x=a-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, 由 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 得 $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,\sqrt{2}]$.

(1) 当 $a\leqslant -1$ 时, 显然 $g'(x)\leqslant 0$, 符合题意.

(2) 当 $-1<a\leqslant 1$ 时, $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}a}{2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则存在 $x_0\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 使得 $\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}a}{2}$. 当 $x\in(0,x_0)$ 时, 有 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{2}a}{2}$, 即 $g'(x)<0$; 当 $x\in(x_0,\pi)$ 时, 有 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{2}a}{2}$, 即 $g'(x)>0$. 所以 $g(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上是减函数, 在 $(x_0,\pi]$ 上是增函数, 要使 $g(x)\leqslant 0$ 在 $x\in[0,\pi]$ 时成立, 只需 $\begin{cases}g(0)\leqslant 0,\\g(\pi)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $a\leqslant\frac{2}{\pi}$ 成立, 又 $-1<a\leqslant 1$, 所以 $-1<a\leqslant\frac{2}{\pi}$. 再结合 (1) 的结果, 故 $a\leqslant\frac{2}{\pi}$.

(3) 当 $a>1$ 时, 分两种情况讨论: 当 $a\geqslant\sqrt{2}$ 时, $g'(x)\geqslant 0$, $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上是增函数, 于是当 $0<x<\pi$ 时, $g(x)>g(0)=0$, 这与 $g(x)\leqslant 0$ 矛盾.

当 $1<a<\sqrt{2}$ 时, $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}a}{2}<1$, 则存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, 使得 $\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}a}{2}$, 当 $x\in$

古代数学文献中的勾股问题

200241 华东师范大学数学系 胡晓娟 汪晓勤

全日制义务教育《数学课程标准》明确提出: “在教学活动中, 教师……要创造性地使用教材, 积极开发、利用各种教学资源, 为学生提供丰富多彩的学习素材.”[2] 数学史是重要的教学资源之一, 但教材对这类资源的运用却相当有限. 作者考察了勾股问题在人教版、华师大版、北师大版、苏教版、上教版等初中教材中的使用情况, 发现教材中的勾股问题比较单一, 也很少运用数学史. 本文考察诸文明古国数学文献中与勾股定理有关的一些问题, 供教材编写者和教师参考.

1. 美索不达米亚

两河流域的先民们很早就发现勾股定理了. 在古巴比伦时期(公元前2000-1600年)的数学泥版BM 96957上, 载有这类问题: “已知一扇门的宽、高、对角线中的两项, 求第三项.”[3] 祭司或直接利用勾股定理, 或基于该定理做近似计算. 古巴比伦时期数学泥版BM 85194上则载有下列问题: “已知圆周长为60 NINDAN(古巴比伦长度单位), 直径为20 NINDAN, 弦所在弓形的高为2 NINDAN. 求弦长.”[4](图1). 古巴比伦时期的泥板BM 85196载有著名的“竿子靠墙”问题: “长30尺的竿子靠墙直立, 当上端沿墙下移6尺时, 下端离墙移动多远?”[4]也是这一类问题.

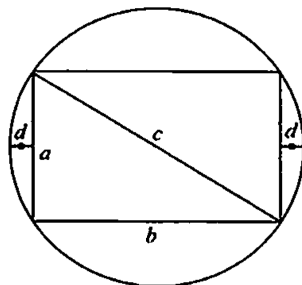


图1

$(0,x_0)$时, 有$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$, 即$g'(x)>0$, 所以$g(x)$在$(0,x_0)$上是增函数, 于是当$0<x<x_0$时, $g(x)>g(0)=0$, 这与$g(x)\leqslant 0$矛盾. 综上, a的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{2}{\pi}\right]$.

由以上的分析可以发现, 对于下面的形式(其他形式可以仿照): 当$x\geqslant x_0$时, 不等式$g(x)=f(x,a)\geqslant 0$恒成立, 求实数a的取值范围, 若具有如下特点: 当$x=x_0$时, 有$g(x_0)=f(x_0,a)=0$成立, 也就是不等式中等号成立的条件恰好是已知区间的一个端点, 那么不等式$g(x)\geqslant 0$成立就转化为不等式$g(x)\geqslant g(x_0)$成立, 即函数$g(x)$在$x\geqslant x_0$时是单调增函数. 于是可以先给出实数a的一个恰当的范围, 使$g'(x)\geqslant 0$成立即可. 由于上述推导是通过$g(x)\geqslant 0$的充分条件$g'(x)\geqslant 0$得到的, 所以接下来还需要证明, 不在这个范围的实数a, 不能够满足条件$g(x)\geqslant 0$. 因此只需找到一个以x_0为端点的区间(x_0,x_1), 当$x\in(x_0,x_1)$时, 有$g'(x)<0$成立, 于是当$x\in(x_0,x_1)$时, $g(x)$是减函数, 因此有$g(x)<g(x_0)=0$成立, 这与$g(x)\geqslant 0$矛盾, 而这个单调减区间的得到只需要解不等式$g'(x)<0$即可. 在具体操作时, 以上过程可能要重复进行, 或者两次求导, 或者分类讨论, 这都需要灵活掌握.

参考文献

[1] 卜以军. 一类取值范围问题的解法思考[J]. 数学教学, 2012(6): 40-41.

[2] 张国治. 用洛必达法则巧解一类高考压轴题[J]. 数学通讯, 2011(12): 42-43.

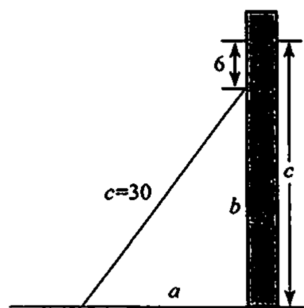


图2

古巴比伦时期数学泥版TMS 1载有:“已知三角形三边分别为50、50和60, 求外接圆半径.”[4–6]如图3, 泥版上给出的公式是

$$c=\frac{1}{2}\frac{(c+a)^2+b^2}{c+a}.\qquad(1)$$

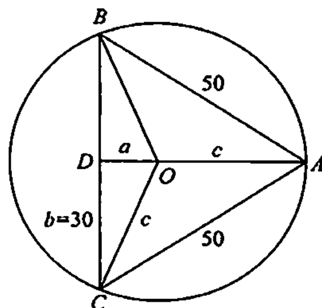
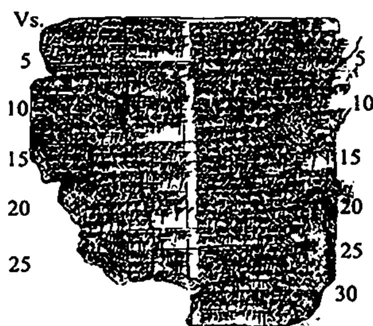


图3

塞琉古时期(约公元前300年)的数学泥版BM 34568(图4)上载有一系列勾股问题[7], 以下我们列举有关问题及其解法.


图4

BM 34568–1 长方形长与对角线之和为9(或50), 宽为3(或20), 问: 长为多少?

$$b=\frac{1}{2}\frac{(c+b)^2-a^2}{c+b}.\qquad(2)$$

BM 34568–2 长方形宽与对角线之和为8, 长为4, 问: 宽为多少?

$$a=\frac{1}{2}\frac{(c+a)^2-b^2}{c+a}.\qquad(3)$$

BM 34568–3 一根芦苇靠墙直立, 当顶端下移3尺(至墙顶)时, 底端离墙移动9尺. 问: 芦苇有多长? 墙有多高?

$$c=\frac{1}{2}\frac{(c-b)^2+a^2}{c-b}.\qquad(4)$$

BM 34568–4 长方形长宽之和为23, 对角线为17, 长、宽各多少?

$$b-a=\sqrt{2c^2-(a+b)^2}.\qquad(5)$$

公式(5)易从图5中直接得出.

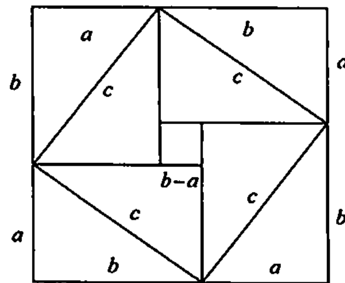


图5

BM 34568–5 长方形长与对角线之和为9(或45), 宽与对角线之和为8(或40), 长、宽各为多少?

$$a+b+c=\sqrt{(c+a)^2+(c+b)^2-[(c+b)-(c+a)]^2}.\qquad(6)$$

事实上, 由图6可知: $(c+a)^2+(c+b)^2-c^2=(a+b+c)^2-2ab$, 故得 $(a+b+c)^2=(c+a)^2+(c+b)^2-(b-a)^2$, 由(6)即得$a$和$b$.

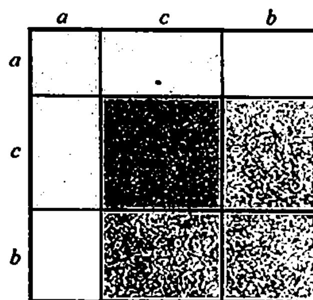


图6

2. 古埃及

虽然古埃及绳师已利用3、4、5的绳长比例来获得直角(华师版教材中有介绍), 但令人失望的是, 在已知的僧侣文纸草书上, 除了加罕纸草书上有零星的直角三角形记录外, 我们并没有发现勾股问题. 不过, 在年代较僧侣文纸草书更晚的俗体文纸草书中, 我们却有所发现. 开罗纸草书J. E. 89127–30(公元前3世纪)载有如下问题[8]:

JE 89127–30–1 长10$\left(或14\frac{1}{2}\right)$尺的竿

子靠墙直立, 若下端离墙移动6(或10, 或8)尺, 则上端下移几尺?

JE 89127–30–2 长10 $\left(\text{或}14\frac{1}{2}\right)$ 尺的竿子靠墙直立, 若上端下移2(或4)尺, 则下端离墙移动几尺?

JE 89127–30–3 竿子靠墙直立, 若下端离墙移动6(或10)尺时, 上端下移2(或4)尺, 则竿子高几尺?

类似于BM 34568–3, 本题可用公式(4)来求解. 俗体文纸草书J. E. 89127–30与泥版书BM 34568属于同一时期, 两种文明之间很可能存在数学交流.

3. 中国

勾股定理在中国亦有悠久的历史. 早在《九章算术》成书时代, 中国的数学家们就已经熟练掌握以上诸类问题的解法了, 我们列举典型问题如下[9].

JZSS 1 今有木长二丈, 围之三尺. 葛生其下, 缠木七周, 上与木齐. 问: 葛长几何?

JZSS 2 今有竹高一丈, 末折抵地, 去本三尺. 问: 折者高几何?

本题因出现于高考语文卷中而广为人知, 为第2类问题, 解法如公式(2).

JZSS 3 今有池方一丈, 葭生其中央, 出水一尺. 引葭赴岸, 适与岸齐. 问: 水深、葭长各几何?

该题在人教版、北师大版、苏教版、上教版教材中都有列出. 《九章算术》给出的水深公式是

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

JZSS 4 今有垣高一丈, 倚木于垣, 上与垣齐. 引木却行一尺, 其木至地. 问: 木长几何?

此系《九章算术》中唯一的"竿子靠墙"问题, 解法如公式(4). 南宋数学家杨辉在《详解九章算法》中又补充了一题: "垣高一丈, 欹木齐垣, 木脚去本, 以画记之. 卧而较之, 过画一尺. 问去本几何. "解法如公式(7).

JZSS 5 今有户高多于广六尺八寸, 两隅相去适一丈. 问: 户高、广各几何? (第5类)

先由等式 $(a+b)^2=2c^2-(b-a)^2$ 得出 $a+b$, 再得出 a 和 b.

JZSS 6 今有户不知高广, 竿不知长短. 横之不出四尺, 从之不出二尺, 邪之适出. 问: 户高、广、袤各几何?

如图7, 在边长为 c 的正方形中分别作边长为 a 和 b 的正方形, 易见, III的面积等于矩形I和II的面积之和, 即

$$(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b).$$

由此可得下列公式:

$$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b),$$
$$b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a),$$
$$c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b).$$

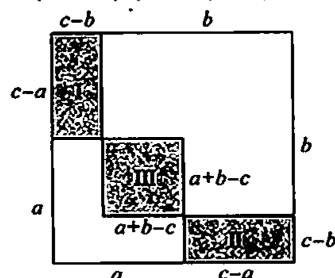


图7

第6、7两类问题为后来的中算家所解决.

4. 印度

印度古代的《绳法经》(公元前3000–800年)中也载有勾股定理. 公元7世纪印度数学家婆什迦罗一世(Bhaskara Ⅰ)、婆罗摩笈多(Brahmagupta)、公元9世纪Prithudakaswami、10世纪的阿耶波多二世(Aryabhata Ⅱ)等的数学著作中都载有勾股问题. 到了12世纪, 印度数学家婆什迦罗二世(Bhaskara Ⅱ)在其《莉拉沃蒂》中系统讨论了各种勾股问题的解法[10].

LILA 1 平地上竹高32尺, 为风所折, 竹梢触地, 距根16尺, 问: 折处高几何?

本题与JZSS 2如出一辙, 解法亦同. 折竹问题早已出现于婆什迦罗一世、Prithudakaswami、阿耶波多二世等数学家的著作中.

LILA 2 桩高9尺, 顶有孔雀, 根有洞穴. 离穴三倍于桩高之处有蛇, 正爬向洞穴; 孔雀见蛇, 斜扑之. 若二者行程相等, 则距穴何处相遇?

如图8, 解法同上题. 在印度古代数学史上, "相同行程"屡见不鲜. 婆什迦罗一世用鹰与老鼠来设题; 而Prithudakaswami则用猫代替了鹰. 婆什迦罗一世还设有"苍鹭捕鱼"问题: "长方形水池的长和宽分别为12和6, 东

北角有鱼, 西北角有苍鹭. 鱼惧怕苍鹭, 沿对角线逃到南侧, 为沿池边疾行的苍鹭所捕. 已知苍鹭和鱼的行程相等, 问: 两者行程几何? "如图9, 这实际上还是第2类问题: 已知 $b+c=18$, $a=6$, 求 c. 婆什迦罗 I 利用公式 $c=\frac{1}{2}\left[c+b+\frac{a^2}{c+b}\right]$ 得出结果.

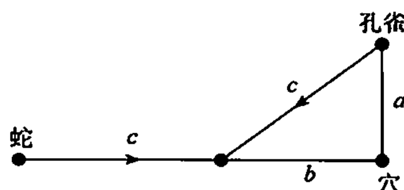


图8

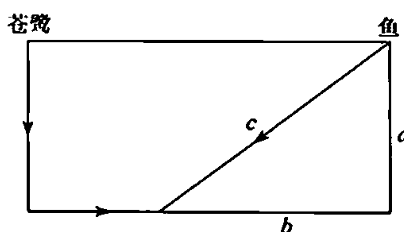


图9

LILA 3 荷花出水 $\frac{1}{2}$ 尺, 风吹倾斜, 于2尺处没于水, 求水深几何.

本题与 JZSS 3 相似, 解法同上题. 该问题也出现于婆什迦罗一世和 Prithudakaswami 的著作中. 11世纪阿拉伯数学家阿尔·卡克希 (al-Karkhi, 953 - 1029) 和15世纪中亚数学家阿尔·卡西 (al-Kashi, 1353? - 1429) 的著作中都载有类似问题.

LILA 4 弦为17, 勾股和为23, 求勾和股.

解法如公式 (5).

LILA 5 勾股差为7, 弦为13, 求勾和股.

本题与 JZSS 5 相似, 解法亦同.

5. 结语

许多问题, 如"竿子靠墙"或"倚木于垣"问题、"引葭赴岸"或"风吹莲倾"问题、"相等行程"问题、"大风折竹"问题等流传后世, 成为数学名题. 13世纪初, 意大利数学家斐波纳契 (L. Fibonacci, 1170? -1250?)在《计算之书》中设题: "长20英尺的矛, 靠塔直立. 若将底端离墙外移12英尺, 则尖端抵塔多高? "[11] 此系"竿子靠墙"问题在中世纪欧洲广为人知的明证. 15世纪末, 意大利数学家卡兰奇 (F. Calandri, 1467 - 1512) 出版的《算术》中设题: "树高50尺, 为风所折, 树梢若地, 距根30尺, 问: 折处高几尺? "[12]此系"大风折竹"问题的翻版. 今天, "竿子靠墙"问题和"大风折竹"问题依然出现在法国中学数学教材中[13]. 可见, 一个好的数学问题, 往往经得起时间的考验, 犹如陈年佳酿, 历久弥香.

历史是一座宝藏, 蕴含了取之不尽、用之不竭的教学资源. 数学教师若想创造性地使用教材, 为学生提供丰富多彩的素材, 数学史乃是一条必由之路.

参考文献

[1] 沈康身. 中算导论 [M]. 上海: 上海教育出版社, 1986.

[2] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001.

[3] Robson, E. Three old Babylonian methods for dealing with 'Pythagorean triangles'. *Journal of Cuneiform Studies*, 1997, 49: 51-72.

[4] Høyrup, J. Pythagorean 'Rule' and 'Theorem'-Mirror of the relation between Babylonian and Greek mathematics. *In* J. Renger (ed.), *Babylon: Focus Mesopotamischer Geschichte, Wiege früher Gelehrsamkeit, Mythos in der Moderne*. Saarbrücken: SDV Saarbrücker Druckerei und Verlag, 1998.

[5] Friberg, J. *Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2005.

[6] Friberg, J. *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2007. 1-71.

[7] Høyrup, J., Seleucid innovations in the Babylonian 'algebraic' tradition and their kin abroad. In: Dold-Samplonius, Y. et al. (Eds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2002.

[8] Melville, D. J. Poles and walls in Mesopotamia and Egypt. *Historia Mathematica*, 2004, 31: 148-162.

(下转第12-38页)

关于祖冲之的密率355/113的一点注记

300387 天津师范大学数学系 边 欣

祖冲之的密率$\frac{355}{113}$是圆周率π的一个非常精确的近似值. 事实上, 两者的前7位数完全相同:

$\pi=3.1415926535897\cdots$,

$\frac{355}{113}=3.1415929203539\cdots$.

数学大师华罗庚在其名著《数论导引》中, 对祖冲之的密率$\frac{355}{113}$与圆周率π的近似性进行了探讨, 应用丢番图理论证明了在分母不超过336的分数中, 与π最接近的是$\frac{355}{113}$. 夏道行教授在《π和e》一书中也研究了这一问题, 运用连分数方法证明了在分母不超过8000的分数中, 与π最接近的还是$\frac{355}{113}$. 张景中院士在《好玩的数学》丛书的总序中, 用简单的初等不等式将8000这个界限提高到16586, 即证明了若分数$\frac{p}{q}$比$\frac{355}{113}$更接近π, 则分母$q>16586$.

本文用简明的方法证明下面的结果.

(1) 在小于π的分数中, 比$\frac{355}{113}$更接近π的分数的最小分母为16604, 该分数为$\frac{52163}{16604}=3.1415923873765\cdots$, 与圆周率$\pi$相比两者前7位数完全相同.

(2) 在大于π的分数中, 比$\frac{355}{113}$更接近π的分数的最小分母为33215, 该分数为$\frac{104348}{33215}=3.1415926539214\cdots$, 与圆周率$\pi$相比两者前10位数完全相同.

设p、q为正整数. 记$f(x)=\frac{355x-22}{113x-7}$, 其中$x\geqslant 1$.

易知$f'(x)=\frac{1}{(113x-7)^2}>0$, 故$f(x)$为严格单增函数.

又因为$\frac{355}{113}-f(x)=\frac{1}{113(113x-7)}>0$, 从而$\frac{355}{113}$为$f(x)$的上界.

由$f(x)=\pi$, 得$x=\frac{22-7\pi}{355-113\pi}=293.6\cdots$, 可知$f(293)<\pi<f(294)$.

定理1 若分数$\frac{p}{q}$满足$\pi<\frac{p}{q}<\frac{355}{113}$, 则$q$的最小值为33215.

证明: 由$\pi<\frac{p}{q}<\frac{355}{113}$, 得$0<\frac{355}{113}-\frac{p}{q}<\frac{355}{113}-\pi$, 即

$$0<\frac{355q-113p}{113q}<\frac{355}{113}-\pi.$$

当$355q-113p\geqslant 2$时, 得$\frac{2}{113q}<\frac{355}{113}-\pi$, 故$q>\frac{2}{355-113\pi}=66347.4\cdots$, 从而$q\geqslant 66348$.

当$355q-113p=1$时, 易得此二元一次不定方程的全部正整数解为

$p=355r-22$, $q=113r-7$,

其中r为正整数.

注意到$\frac{p}{q}=f(r)$, 故$r=294$时, $q=113r-7$达到最小值33215. 此时, $p=355r-22=104348$.

综上所述, 若分数$\frac{p}{q}$满足$\pi<\frac{p}{q}<\frac{355}{113}$, 则$q$的最小值为33215, 且

$$\frac{p}{q}=f(294)=\frac{104348}{33215}.$$

定理2 若分数$\frac{p}{q}$满足$\frac{p}{q}<\pi$, 且$\pi-\frac{p}{q}<\frac{355}{113}-\pi$, 则$q$的最小值为16604.

证明: 由$\frac{p}{q}<\pi$及$\pi-\frac{p}{q}<\frac{355}{113}-\pi$,

得$0<\frac{355}{113}-\frac{p}{q}<2\times\left(\frac{355}{113}-\pi\right)$, 即

$$0<\frac{355q-113p}{113q}<2\times\left(\frac{355}{113}-\pi\right).$$

当$355q-113p\geqslant 2$时, 得$\frac{1}{113q}<\frac{355}{113}-\pi$, 故$q>\frac{1}{355-113\pi}=33173.7\cdots$, 从而$q\geqslant 33174$.

当$355q-113p=1$时, 得$\frac{1}{113q}<2\times\left(\frac{355}{113}-\pi\right)$, 故

$$q>\frac{1}{2\times(355-113\pi)}=16586.8\cdots.$$

再由$q=113r-7$, 其中r为正整数, 得$r>146.8\cdots$, 从而$r\geqslant 147$. 故$r=147$时, $q=113r-7$达到最小值16604. 此时, $p=355r-22=52163$.

综上所述, 若分数$\frac{p}{q}$满足$\frac{p}{q}<\pi$, 且$\pi-\frac{p}{q}<\frac{335}{113}-\pi$, 则$q$的最小值为16604, 且

$$\frac{p}{q}=f(147)=\frac{52163}{16604}.$$

根据上述两个定理可知, $\frac{52163}{16604}$是比$\frac{355}{113}$更接近π的分母最小的分数. 并且随着$r=147, 148, \cdots, 293$的增大, 由$f(r)=\frac{355r-22}{113r-7}$确定的小于$\pi$的分数逐渐接近$\pi$. 其中$f(293)=\frac{103993}{33102}=3.1415926530119\cdots$, 与$f(294)$、圆周率$\pi$相比, 它们的前10位数完全相同.

这表明由祖冲之的密率$\frac{355}{113}$和约率$\frac{22}{7}$所构成的简单分式$f(r)=\frac{355r-22}{113r-7}$, 蕴涵着与圆周率$\pi$的非常精密的近似!

参考文献

[1] 陈仁政. 说不尽的π[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

(上接第12–18页)

把a、b看成方程$x^2+(2c-1)x+2c^2+c+\frac{5}{4}=0$的两根, 由于$a$、$b$为实数, 可知$\Delta=(2c-1)^2-4\left(2c^2+c+\frac{5}{4}\right)\geqslant 0$, 整理得$(c+1)^2\leqslant 0$, 即$c=-1$. 所以$a$、$b$是方程$x^2-3x+\frac{9}{4}=0$的两根, 解得$a=b=\frac{3}{2}$.

三、借助于$[x]\leqslant x$, 建立不等式, 通过讨论x转化为方程

例6 (2009年全国初中数学联赛选择题第三题) 用$[x]$表示不大于x的最大整数, 方程$x^2-2[x]-3=0$的解的个数为( ).

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (4) 4.

解: 由$x^2=2[x]+3\leqslant 2x+3$得$x^2-2x-3\leqslant 0$, 所以$-1\leqslant x\leqslant 3$.

(1) 当$-1\leqslant x<0$时, $[x]=-1$, 此时$x^2-1=0$, 得$x=-1$; (2) 当$0\leqslant x<1$时, $[x]=0$, 此时$x^2-3=0$, x不存在; (3) 当$1\leqslant x<2$时, $[x]=1$, 此时$x^2-5=0$, x不存在; (4) 当$2\leqslant x<3$时, $[x]=2$, 此时$x^2-7=0$, 得$x=\sqrt{7}$; (5) 当$x=3$时, 方程成立. 综上, $x=-1, \sqrt{7}, 3$共三个解.

四、借助于若干个非负数的和等于零

众所周知, 若干个非负数的和等于零, 则每个非负数都等于零. 通过将已知的方程转化为几个非负数的和, 就可以实现由不等式向等式的转化.

例7 (2000年全国初中数学联合竞赛填空题第3题) 实数x、y满足$x\geqslant y\geqslant 1$, 且$2x^2-xy-5x+y+4=0$, 则$x+y=$____.

解: $2x^2-xy-5x+y+4=(x^2-4x+4)+(x^2-xy-x+y)=(x-2)^2+(x-y)(x-1)=0$, 由于$x\geqslant y\geqslant 1$, 所以$(x-y)(x-1)\geqslant 0$, 又$(x-2)^2\geqslant 0$, 从而$(x-2)^2=(x-y)(x-1)=0$, 于是$x=y=2$, 所以$x+y=4$.

总之, 上述几类解法的一个共同特征是挖掘问题中的隐含条件, 把这些条件整理成用"$\geqslant$"或"$\leqslant$"表示的不等式, 利用不等式中等号成立的条件获得方程的解.

数学与技术的一次牵手合作
——对蚂蚁觅食路径问题的探究

200135 上海市建平中学 虞 涛

问题: 已知一个底面半径为r、高为h的圆柱. 点A、B为圆柱轴截面矩形相对的两个顶点, 如图1. 若下底面A处有一只蚂蚁, 上底面点B处有一食物, 蚂蚁在圆柱体表面上沿怎样的路径爬行, 才能最快吃到食物?

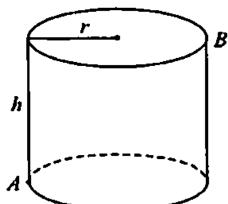


图1

探究1: (1) 若令$h=1$, $r=1$, 怎样的路径最短?

把圆柱沿蚂蚁所在的母线AC展开为矩形, 由勾股定理得知路径长为$AB=\sqrt{\pi^2+1}$.

(2) 上述结论是蚂蚁所走的最短路径吗?

事实上, 它应是"沿圆柱侧面爬行"(不妨记为"路径1")的最短路径. 若蚂蚁"沿母线AC垂直向上爬到上底面点C处, 再沿直径CB爬到点B处"(不妨记为"路径2", 见图2), 则路径长为$AC+CB=h+2r=1+2\times1=3$, 而$3<\sqrt{\pi^2+1}$, 因此"路径2"更短.

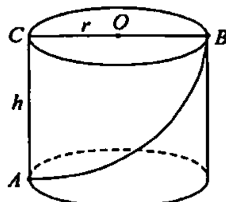


图2

探究2: (1) 对于高或底不同的圆柱, 哪条路径较短?

若令$h=2$, $r=1$. "路径1"的长为$\sqrt{\pi^2+4}$; "路径2"的长为4. 因为$\sqrt{\pi^2+4}<4$, 因此"路径1"更短.

(2) 讨论一般情况, 哪条路径较短?

比较两种路径的长: 令$\sqrt{(\pi r)^2+h^2}=h+2r$, 得$\dfrac{h}{r}=\dfrac{\pi^2-4}{4}\approx1.46$.

故当$\dfrac{h}{r}>1.46$时, "路径1" 较短; 当$\dfrac{h}{r}<1.46$时, "路径2" 较短; 当$\dfrac{h}{r}=1.46$时, 两条路径一样长.

探究3: 是否还有更短的路径?

若从点A处沿侧面爬到上底面圆周上某点D处, 再在上底面上沿直线爬到点B处(不妨记为"路径3", 见图3). 设$\angle COD=x$(弧度), 则路径长为

$$AD+DB=\sqrt{h^2+(xr)^2}+2r\cos\frac{x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

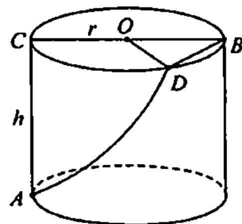


图3

(1) 若$h=1$, $r=1$, 令$f_1(x)=\sqrt{x^2+1}+2\cos\dfrac{x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

$f_1(x)$是否有最小值, 何处取得最小值? 利用中学数学知识内容不能解决, 不妨借用图形计算器探究. 作出函数$f_1(x)$的图像, 如图4. 可以观察到: 在$[0,\pi]$上, 当$x=0$时, 函数$f_1(x)$有最小值3. 事实上, 这正是上面"路径2".

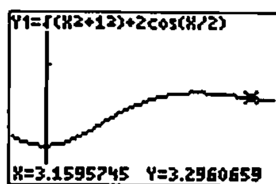


图4

但是, 上述结果是从观察图像发现得到的. $f(0)=3$ 真是最小值吗? 从图像上看: 在 $x=0$ 附近, 函数 $f_1(x)$ 图像的单调性并不十分明显. 能否从数学上进一步证明或验证呢? 求导函数 $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\sin\frac{x}{2}$, 此导函数不易判断符号. 仍然需要借助于图形计算器作出 $f'(x)$ 图像. 可以清晰地观察到: 在 $x=0$ 右侧附近, $f'(x)>0$. 这说明: 在 $x=0$ 右侧附近, 函数 $f(x)$ 是递增的, 因此 $f(0)=3$ 是最小值.

(2) 若 $h=2$, $r=1$, 令 $f_2(x)=\sqrt{x^2+4}+2\cos\frac{x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

可以得知: $f(x)_{\min}=f(\pi)=\sqrt{\pi^2+4}$. 事实上, 这正是上面"路径1".

(3) 讨论一般情况, 这三条路径中, 哪条最短?

令 $\frac{h}{r}=t$, 令 $f(x)=\sqrt{(tr)^2+(xr)^2}+2r\cos\frac{x}{2}=r\left(\sqrt{t^2+x^2}+2\cos\frac{x}{2}\right)(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

下面取 $r=1$, t 为可变的参数, 作出函数 $f(x)$ 的动态图像, 截取静止图像如图5、6、7.

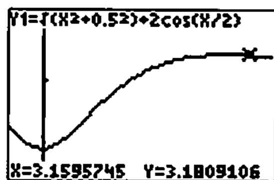


图5 $(r=1,t=0.5)$

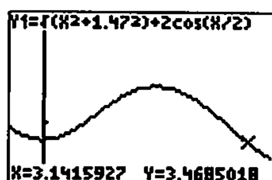


图6 $(r=1,t=1.47)$

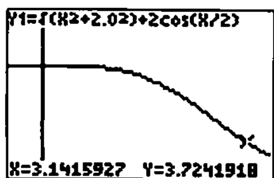


图7 $(r=1,t=2.0)$

可以观察到: 当 t 从 $0\to+\infty$ 的变化过程中, 函数 $f(x)$ 的图像在 $[0,\pi]$ 上呈现出由递增、到上凸、最后递减的状态, 并且是从 $t=2$ 开始一直保持递减. 特殊地, 当 $t=0.5$ 和1.2时, 最小值均为 $f(0)$; 当 $t=1.47$ 或2时, 最小值均为 $f(\pi)$. 所以, "路径3"不是最短路径. 因此, 如果我们使用常见的圆柱形的可口可乐易拉罐进行实验, 由于它的高度12.310厘米与半径3.305厘米之比为3.72>1.46, 那么"路径1"就是最短路径.

探究4: (1) 如果考虑实际情况, 蚂蚁在圆柱形容器的侧面上爬行一般都比在上底面上爬行困难, 爬行的速度有一定的差别, 那么沿怎样的路径爬行时间最短?

若设在圆柱侧面和底面上爬行的速度之比 $v_1:v_2=1:2$, 则从点 A 处沿"路径3" (事实上, "路径3"是"路径1"和"路径2"之间的一般情况) 爬到点 B 处的时间为

$$t=\frac{AD}{v_1}+\frac{DB}{v_2}=f(x)=r\left(\sqrt{t^2+x^2}+\cos\frac{x}{2}\right)(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

若 $h=1$, $r=1$, 令 $f_1(x)=\sqrt{x^2+1}+\cos\frac{x}{2}$;

若 $h=2$, $r=1$, 令 $f_2(x)=\sqrt{x^2+4}+\cos\frac{x}{2}$.

可以得知: 函数 $f_1(x),f_2(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上为递增, 最小值均在 $x=0$ 取得, 因此沿"路径2"爬行时间最短.

(2) 讨论更一般情况, 沿怎样的路径爬行时间最短?

设 $v_1:v_2=1:k(k>1)$, 则

$$f(x)=r\left(\sqrt{t^2+x^2}+\frac{2}{k}\cos\frac{x}{2}\right)(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

若 $h=1$, $r=1$, 令 $f_1(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{2}{k}\cos\frac{x}{2}$;

若 $h=2$, $r=1$, 令 $f_2(x)=\sqrt{x^2+4}+\frac{2}{k}\cos\frac{x}{2}$, 其中 k 为可变的参数.

通过实验可观察到: 当 k 从 $1\to+\infty$ 时, $f_1(x)$ 呈现出由递增、到上凸、最后递增的状态, 且当 k 较大时, $f_1(x)$ 保持递增; 当 k 从 $1\to+\infty$ 时, $f_2(x)$ 呈现出由递减、到上凸、最后递增的状态, 多次改变 h 和 r 的值得到不同 t 的值, 同时任意对 k 取值, 可以发现 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的最小值始终均在 $x=0$ 或 $x=\pi$ 取得. 所以, 无论圆柱的高和底大小如

何, 沿"路径 1"或"路径 2"爬行仍然花费时间最少.

探究5: 如果食物在上底面圆O的内部某个位置B处, 会有怎样的结论?

假设点B在CO的延长线上, $OB=\frac{r}{2}$. 令$\frac{h}{r}=t$, $\angle COD=x$, $v_1:v_2=1:k\,(k>1)$, 则从点A处沿"路径3"爬到点D, 再到点B处的时间为

$$\frac{AD}{v_1}+\frac{DB}{v_2}=f(x)=r\left(\sqrt{t^2+x^2}+\frac{1}{k}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}+\cos x}\right)\ (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

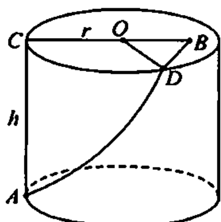


图8

取$r=1$, 其中t、k均为可变的参数.

通过实验可观察到: 若取$t=2$或3, 当k从$1\to+\infty$变化时, $f(x)$在$[0,\pi]$上始终保持递增; 若取$t=4$, 当k从$1\to+\infty$时, $f(x)$呈现出由递增、到下凹、最后递增的状态; 若取$t=5$, 当k从$1\to\infty$变化时, $f(x)$在$[0,\pi]$上呈现递减、下凹、最后递增. 具体地, 当$t=5$, $k=1.105$时, $f(x)$的最小值仅在$x\approx2.38$取得. 因此, 当食物在圆柱上底面圆内时, 如果沿圆柱侧面爬行非常困难时而水平面爬行相对比较快时, 则沿"路径3", 即在侧面爬行一段, 再在上底面爬行一段时, 费时较少.

探究6: "路径1"所在的曲线是否在一个平面内?

以点A为原点, 以过点A的下底面圆O_2的切线为x轴, 半径AO_2所在的直线为y轴, 母线AC为z轴, 建立空间直角坐标系, 如图9. 设"路径1"上的一个动点P在下底面上的射影为P_1, 路径$\overset{\frown}{AB}$的中点记为E. 若令$r=1$, $h=2$, 设$\angle AO_2P_1=x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$, 则

$$E(1,1,1), B(0,2,2), P\left(\sin x, 1-\cos x, \frac{2x}{\pi}\right).$$

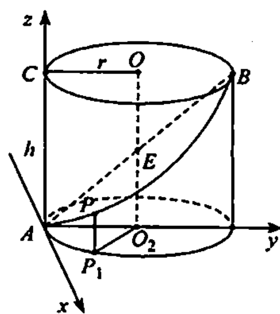


图9

于是$\overrightarrow{AE}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{AB}=(0,2,2)$, $\overrightarrow{EB}=(-1,1,1)$, $\overrightarrow{AP}=\left(\sin x,1-\cos x,\frac{2x}{\pi}\right)$.

令$\overrightarrow{AP}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AE}+\lambda_3\overrightarrow{EB}$, 其中$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$为不全为0的常数, 则

$$\left(\sin x,1-\cos x,\frac{2x}{\pi}\right)=\lambda_1(0,2,2)+\lambda_2(1,1,1)+\lambda_3(-1,1,1).$$

于是$1-\cos x=\frac{2x}{\pi}$.

当且仅当$x=0$、$\frac{\pi}{2}$或π时, 存在$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使得$\overrightarrow{AP}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AE}+\lambda_3\overrightarrow{EB}$成立. 因此动点$P$不能始终在由点$A$、$E$、$B$所确定的平面内, 因此"路径1"所在的曲线不在同一个平面.

探究7: 如果蚂蚁始终保持在同一个倾斜的平面上从点A直接爬行到点B处, 这条路径(不妨记为"路径4")是怎样的曲线?

由椭圆的定义可以证明"路径4"所在的轨迹是椭圆, 下面求出该椭圆的方程. 同样令$r=1$, $h=2$. 在圆柱下底面上, 过点A作垂直于下底面半径AO_2的垂线l, 过轨迹上任意一点P作下底面的垂线PQ, 过点Q作l的垂线QR, 过点Q作AO_2的垂线QH. 在轨迹所在的平面内, 以线段BA的中点O_1为原点, BA所在的直线为x轴, 建立平面直角坐标系xO_1y. 设轨迹上任意一点P在平面xO_1y内的坐标为(x,y), 则

$$x=OA-PR=\sqrt{2}-\sqrt{2}(1-\cos x_1)=\sqrt{2}\cos x_1,$$

$$y=AR=BQ=\sin x_1.$$

因此, 点P的轨迹方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1\,(y\geqslant0)$.

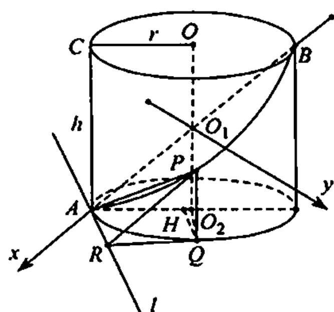


图10

探究8: "路径1"是怎样的曲线?

由前面的结论可知: "路径1"上的任意一点P的坐标为$\left(\sin x, 1-\cos x, \frac{2x}{\pi}\right)$, 因此"路径1"所在的曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sin\theta, \\ y=1-\cos\theta, \\ z=\frac{2\theta}{\pi}, \end{cases} (\theta\text{为参数}).$$

事实上, 这个方程所表示的曲线就是圆柱螺旋线.

探究9: 探究这个问题有什么价值?

查阅资料获悉: 飞蛾的飞行经常由上往下或由下往上沿着一条曲线——圆柱螺旋线飞行. 这是为什么? 原来, 飞蛾为了保护自己的性命, 当它发现它的大敌——蜻蜓、蝙蝠等以风驰电掣般地向它飞来, 生命危在顷刻时, 飞蛾就迅速沿着圆柱螺旋线飞去. 这样, 它的位置上下、左右时刻在变化着, 飞行路径不在同一个平面内, 这样就不容易被天敌所吞食. 还有一种蔓生植物——牵牛花常缠绕在其他直立较粗壮的植物主干上向上爬, 形成一条圆柱螺旋线. 这又是为什么? 因为植物生活需要阳光, 只有长得更快, 爬得更高, 才能不被其他植物遮在下面, 获得较多的阳光. 牵牛花就是这样, 它要爬快爬高, 可它自己枝干非常细弱, 无法爬得高, 于是只有缘着别的植物枝干向上爬. 而一般植物主干近似圆柱形, 所以牵牛花在这种主干上爬出来的曲线就是一条圆柱形螺旋线. 展开圆柱侧面, 就可以看到主干上圆柱螺旋线的一个"周期"正好是侧面展开矩形的对角线. 因此牵牛花的生长也是沿数学上最短路径来达到自己的目的. 圆柱螺旋线已为人类所广泛应用, 如我们坐的沙发里面的弹簧, 机器里的螺丝杠螺纹, 石油、煤气管道的包扎等.

一点体会: 这里对一道数学问题的探究, 我们把注意力放在提出问题的设想和解决问题的策略上, 这样既使用了纯数学的方法和技巧, 又借助图形计算器进行探究和发现, 把问题放进动态演示和演算的环境中, 生动地获得问题的答案, 同时也表现出对于高中数学知识范畴内束手无策的问题, 在技术的支持下获得了在实际应用上可借鉴的解决问题的方式和方法, 最后再从数学上对问题进行了较严谨的论证, 从而较完整地展现了对一个数学问题的研究过程和方法. 数学知识、方法和数学技术的协助与交互, 是一次完美的牵手. 我们相信, 只要改变传统的教学观, 在日益革新的技术支持下, 还能创造设计出更生动精彩的数学问题, 锻炼我们的探究和实践能力, 发展我们的数学理解能力, 获得更完美、更有价值的结论.

(上接第12–17页)

$a_n(x+\lambda)^n+a_{n-1}(x+\lambda)^{n-1}+\cdots+a_1(x+\lambda)+a_0+\lambda a_nx^n+\lambda a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\lambda a_1x+\lambda a_0=0$.

$\therefore (\lambda+1)a_nx^n+[\lambda na_n+(\lambda+1)a_{n-1}]x^{n-1}+\cdots=0$.

由于上式对任意的实数x都成立, 得$(\lambda+1)a_n=\lambda na_n+(\lambda+1)a_{n-1}=0$.

若$\lambda=-1$, 由$\lambda na_n+(\lambda+1)a_{n-1}=0$得$a_n=0$; 若$\lambda\neq-1$, 由$(\lambda+1)a_n=0$得$a_n=0$. 这均与$a_n\neq0$相矛盾! 得欲证成立.

(2) 设$f(x+\lambda)+\lambda f(x)=0(\lambda>0)$对任意的实数$x$都成立, 令$x=k\lambda(k\in\mathbf{Z})$, 得$f((k+1)\lambda)+\lambda f(k\lambda)=0(\lambda>0)$, 所以$f(k\lambda)\cdot f((k+1)\lambda)\leqslant0$.

因为函数$f(x)$的图像是连续不断的, 所以函数$f(x)$在区间$[k\lambda,(k+1)\lambda)$上有零点, 再由$k\in\mathbf{Z}$知函数$f(x)$有无数个零点.

2012年南通中考卷第25题的命制过程

226692 江苏省海安县仇湖中学 余中华

2012年南通市中考试卷第25题是一道简单的函数应用问题, 通过从函数图像中获取信息, 运用函数知识解决实际问题. 由于本题是一个实际应用问题, 所以需要考虑的因素很多. 笔者有幸参与这次试题的命题, 将第25题命制的过程与思考整理成文.

一、最初的思考

试卷的双向细目表中, 第28题安排的是一道偏代数的综合性问题, 第27题安排的是一道偏几何方向的综合性问题, 准备在第26题位置安排一道纯代数问题, 知识点是一次函数或反比例函数, 因此最初第26题安排的是下面这道题目.

初稿1: 如图1, 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=mx$ 与双曲线 $y=\frac{n}{x}$ 相交于 $A(-1,a)$、B 两点, $BC\perp x$ 轴, 垂足为 C, $\triangle AOC$ 的面积是1.

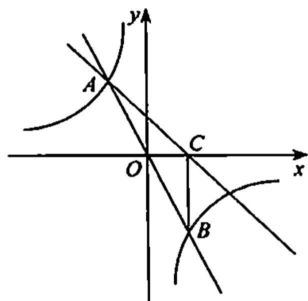


图1

(1) 求 m、n 的值;

(2) 求直线 AC 的解析式.

评析: 这是一道典型的一次函数与反比例函数的综合题目, 其中 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOC$ 的面积相等, 借用反比例函数的几何意义可求出反比例函数解析式, 进而求出点 A 的坐标, 根据点 A 坐标可确定 m 的值. 在已知直线与反比例解析式的情况下, 可列方程组求出点 B 坐标, 点 C 坐标也随之确定, 最后根据点 A、C 坐标确定直线 AC 的解析式.

这道题目考查的知识点基本上都是课程标准所要求的必须掌握的内容, 如课程标准要求的用待定系数法确定一次函数的表达式, 理解正比例函数和理解反比例函数图像在 $k>0$ 和 $k<0$ 时的变化情况, 后来为什么要去掉这道题目呢? 原因有以下3点:

(1) 这道题目的两个问题的问法略显单薄, 求"m、n 的值"和"直线 AC 的解析式", 放在第26题位置不太恰当;

(2) 第28题第(2)小题解答的时候, 也需要用待定系数法求直线解析式, 如果将求直线解析式当作本题的重点问题, 显得有些不太恰当;

(3) 难度系数达不到双向细目表的要求, 因为这道题以函数的形式出现, 最后还用一次函数来解决这个问题, 就没难度了.

当整份试卷初稿完成后, 发现在解答题部分有关实际应用的问题很少, 而南通中考要求中考试卷贴近生活, 因此考虑将这个位置换成一个函数的应用问题;

第25题是一道纯几何的解答题, 需要构造辅助线解决问题, 显然比这道题的难度要大, 从整卷的梯度考虑, 将本题的位置与第25题对调.

二、命制过程的一些思考

2.1 寻找原型

南通中考试卷有个特色是试题紧扣课本, 不管是明扣教材, 还是暗扣教材, 南通中考试卷题目的原型大多来自教材. 由于第27、28题是不借助任何资料, 完全是命题组原创的题目, 因此在命制第25题的时候, 命题组考虑的也是从课本中寻找原型, 由原型进行适当变式.

经过一番搜索, 命题组锁定人教版教材八年级上学期一次函数的例5作为试题原型.

课本原型: "黄金1号"玉米种子的价格为5元/千克, 如果一次购买2千克以上的种子, 超过2千克的部分的种子的价格打8折.

(1) 填出下表:

购买种子数量/千克	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	…
付款金额/元									…

(2) 写出购买种子数量与付款金额之间的函数解析式, 并画出函数图像.

评析: 把这道题作为原型是基于以下考虑:

(1) 这道题是一个实际应用问题, 符合我们要找的函数应用问题的特征;

(2) 这道题是一个分段函数, 有利于考查分类讨论思想方法, 分类思想方法也是进一步学习高中知识所必备的能力;

(3) 这个问题通过填表, 画图, 得出一个函数图像, 如图2, 然后根据函数图像, 分别求出两段图像的函数解析式, 对考查学生是否掌握函数的意义很有帮助.

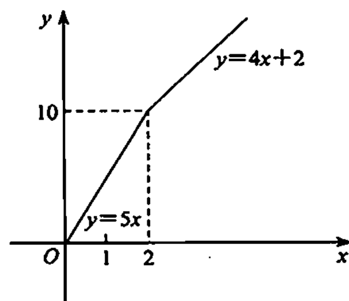


图2

2.2 命制过程

稿1: 甲车由A地向B地行驶, 3.5小时到达, 甲车与A地之间的路程y(千米)与所用时间x(小时)之间的函数图像如图3所示.

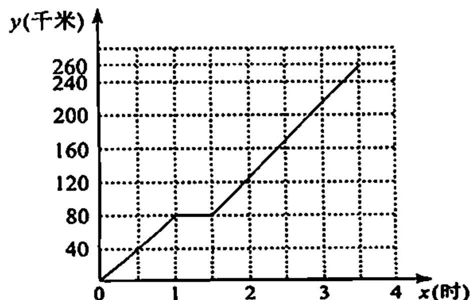


图3

(1) 当$0 \leqslant x \leqslant 1$时, 甲车的速度是____千米/时;

(2) 当$1.5 \leqslant x \leqslant 3.5$时, 求$y$与$x$的函数关系式.

评析: (1) 稿1在原型的基础上作了以下调整: ①更换问题的背景, 将种子问题变成行程问题; ②改变图像形状, 在中间折线部分增加一条平行于x轴的线段, 图像变成3段; ③变换数据, 使得数据更符合实际情况.

(2) 保留的内容: ①题目仍然考查的是分段函数; ②仍然考查读图、识图的能力.

(3) 缺点: 本题放在第25题的位置, 题干和图形都显得过于简单, 且解决问题的方法过于单一, 参考2011年各地中考试卷中关于一次函数的应用问题, 考虑在原图中增加一辆车的图像.

稿2: 甲车由A地向B地行驶, 3.5小时到达, 甲车与A地之间的路程y(千米)与所用时间x(小时)之间的函数图像如图4所示.

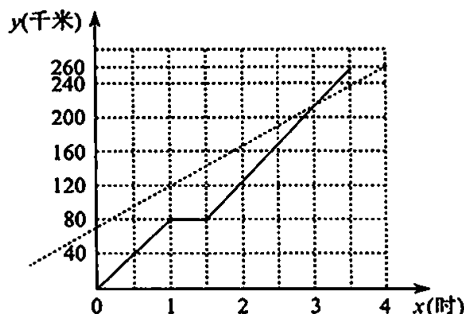


图4

(1) 当$0 \leqslant x \leqslant 1$时, 甲车的速度是____千米/时;

(2) 当$1.5 \leqslant x \leqslant 3.5$时, 求$y$与$x$的函数关系式;

(3) 若C地在A、B两地之间, 且与A地相距20千米, 乙车在甲车出发前1小时从C地出发, 以50千米/时的速度匀速驶往B地, 在图中画出乙车与A地之间的路程y(千米)与所用时间x(小时)之间的函数图像, 并求出当甲车到达B地时, 乙车距离B地还有多少千米?

评析: 增加乙车之后, 题目的难度明显增加, 难度增加主要体现在以下4个方面:

(1) 要画出乙车与A地之间的路程y(千米)与所用时间x(小时)之间的函数图像, 就必须深刻理解两车运动的情况;

(2) 乙车和甲车不是同时出发的, 乙车在甲车出发前1小时出发;

(3) 乙车和甲车不是从同一地点出发的, 乙车是从C地出发, 而C地在A、B两地之间;

(4) 第(3)小题不容易解决, 一是阅读量大; 二是"乙车距离B地还有多少千米"可转化为"当$x=3.5$时, 两车之间的距离", 这点对学生来说有一定的难度; 三是在解决第(3)小题的时候, 确定乙车与A地之间的路程y(千米)与所用时间x(小时)之间函数图像的时候, 需要知道这个图像上两点坐标, 即图像两个端点的坐标, 其中下面端点的坐标不容易确定.

经过这样修改之后, 出现了一个问题, 就是乙车在当$t=-1$的时候就出发了, 不符合初中学生时间应该为正数的思维习惯, 命题组经过商量后, 考虑将两个图像整体向右平移, 将图像全部置于坐标系的第一象限.

稿3: 甲、乙两地相距300千米, 一辆货车和一辆轿车分别从甲地出发驶向乙地, 如图5, 线段OA、折线$B-C-D-E$分别表示货车和轿车距甲地的距离$y_{货车}$(千米)、$y_{轿车}$(千米)与货车出发的时间x(小时)之间的函数关系. 根据图像, 解答下列问题:

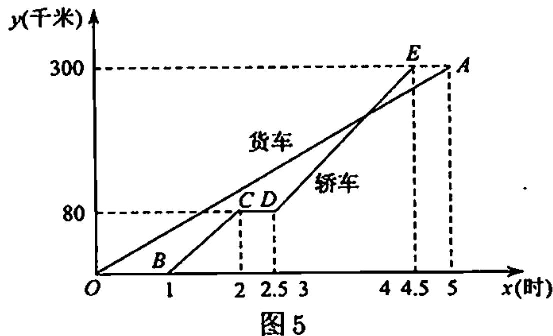


图5

(1) 货车的速度为____千米/时; 轿车$D-E$段的速度为____千米/时;

(2) 图中线段CD表示的实际意义是____;

(3) 求货车出发后多长时间与轿车相遇.

评析: 稿3是在稿2的基础上, 作了以下调整:

(1) 最明显的调整是将图形全部移至第一象限内, 不要求学生作图, 去掉了图形中的网格, 图形比稿2中的图形显得比较简洁、清晰.

(2) 稿2中的甲车、乙车、A地、B地可能会给学生带来阅读的障碍, 在稿3中, 将两车名称定为货车、轿车, 两地名称定为甲地、乙地, 而大写字母A、B、C、D、E则用来表示图中的线段.

语言的叙述力求没有歧义, 如"线段OA、折线$B-C-D-E$分别表示货车和轿车距甲地的距离$y_{货车}$(千米)、$y_{轿车}$(千米)与货车出发的时间x(小时)之间的函数关系".

稿4: 甲、乙两地相距300km, 一辆货车和一辆轿车分别从甲地出发驶向乙地. 如图6, 线段OA、折线$BCDE$分别表示货车和轿车离甲地的距离与时间x(h)之间的函数关系.

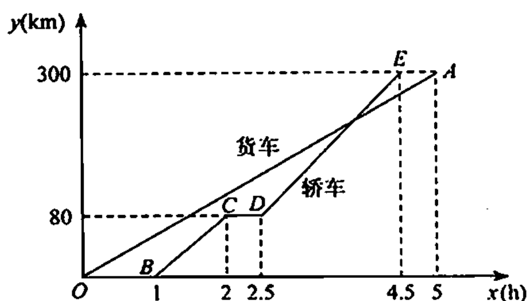


图6

根据图像, 解答下列问题:

(1) 货车的速度为____km/h, 轿车在DE段的速度为____km/h;

(2) 线段CD表示轿车在途中因故停留了____h;

(3) 求货车出发后多长时间与轿车相遇.

评析: 稿4在稿3的基础上的调整主要是语言的调整, 比如:

将"千米/时"改成"km/h", "千米"改成"km", "小时"改成"h"; "折线$B-C-D-E$"改成"折线$BCDE$"; "表示货车和轿车距甲地的距离$y_{货车}$(千米)、$y_{轿车}$(千米)与货车出发的时间x(小时)之间的函数关系"改成"线段OA、折线$BCDE$分别表示货车和轿车离甲地的距离与时间x(h)之间的函数关系".

2.3 最终定稿

终稿: 甲、乙两地相距300km, 一辆货车和一辆轿车先后从甲地出发驶向乙地. 如图7, 线段OA表示货车离甲地的距离y(km)与时间x(h)之间的函数关系, 折线$BCDE$表示轿车离甲地的距离y(km)与时间x(h)之间的函数关系. 根据图像, 解答下列问题:

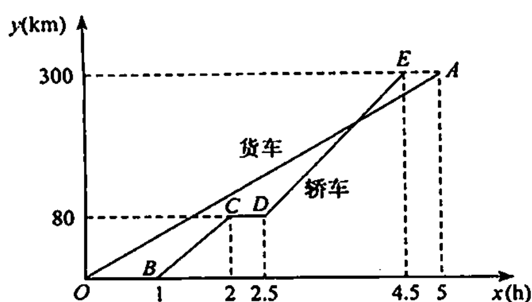


图7

(1) 线段CD表示轿车在途中停留了____h;

(2) 求线段DE对应的函数解析式;

(3) 求轿车从甲地出发后经过多长时间追上货车.

评析: 终稿在稿4的基础上做了很多大的调整:

(1) 为了避免语言上的歧义, 终稿最终将稿4中的一句话改成"线段OA表示货车离甲地的距离y(km)与时间x(h)之间的函数关系, 折线$BCDE$表示轿车离甲地的距离y(km)与时间x(h)之间的函数关系." 尽管增加了学生的阅读量, 但为了语言的叙述不出现科学性错误, 命题组觉得这样做还是值得的, 另外还在这句话前面添加"如图", 进一步降低引起争议的可能.

(2) 将第(2)小题移至第(1)小题, 将第(1)小题求"轿车在DE段的速度"改成"求线段DE对应的函数解析式", 然后移至第(2)小题. 这样做有两个目的, 一是原来前面两小题过于简单, 有送分的嫌疑, 而现在第(2)小题稍微有了一点难度, 在难度上与第(3)小题形成了一定的梯度. 更难得的是第(2)小题其实是原来第(3)小题解答的一部分, 这样做, 正好建立起两个小题之间的联系, 将第(3)小题复杂的解答过程分了一部分到了第(2)小题, 安排更加合理. 这样安排还带来了一个意外的惊喜, 那就是减少了阅卷量, 第(1)小题减少了一空, 第(2)、(3)两小题合起来的答题量与原来的第(3)小题相同, 也就相当于整卷减少了两空的阅卷量.

(3) 将第(3)小题"求货车出发后多长时间与轿车相遇"换成"轿车从甲地出发后经过多长时间追上货车", 这样调整的好处有: ①点B发挥了作用, 在原来的这么多稿当中, BC这段图像在解答过程中几乎都没有涉及, 如果点B不发挥作用, 那么线段BC这段图像就是多余的图像; ②说法"追上"比"相遇"更好, 相遇一般理解是"相向", 追上一般理解是"同向".

这样做命题组老师们也有个担心, 那就是增加了题目的难度. 两函数图像交点的横坐标为3.9(小时), 而答案需减去1小时, 也许就有考生忘记减去1小时而出错, 不过从阅卷的情况, 这种担心是多余的, 只有很少数学生没有减去1小时.

三、关于答案控制的一些思考

在解答第(3)小题的时候除了可以应用函数思想外, 还可以看作一个追及问题, 根据路程关系列方程解应用题.

设轿车从甲地出发后经过x小时追上货车, 则因为货车的速度为300÷5=60(km/h), 轿车在BC段速度为80km/h, 轿车在DE段速度为220÷2=110(km/h).

所以$60(x+1)=1\times 80+110(x-1.5)$, 解得$x=2.9$.

尽管列方程解决这个问题比用一次函数来得简单, 但由于本题考查的核心思想是函数思想, 因此在避免考生列方程解应用题方面, 我们也做了一些思考, 比如在稿4中, 3个问题的设置分别是:

(1) 货车的速度为____km/h, 轿车在DE段的速度为____km/h;

(2) 线段CD表示轿车在途中因故停留了____h;

(3) 求货车出发后多长时间与轿车相遇.

细品这3个问题的问法, 不难发现这3个问题有故意引导学生列方程解决问题的嫌疑, 这就与命题组的初衷相违背了.

而终稿中的3个问题分别是:

(1) 线段CD表示轿车在途中停留了____h;

(2) 求线段DE对应的函数解析式;

(3) 求轿车从甲地出发后经过多长时间追上货车.

第(1)小题不再要求两车的速度, 第(2)小题求的是函数解析式, 将学生的思维引向用函数观点解决问题, 所以考生最终选择列方程解应用题的可能性就大大减少, 从最后阅卷结果来看, 这个问题的控制还是很成功的.

陌生还是熟悉

——2012年上海中考第24题

200090　上海市新大桥中学　赵艳凤

带了几届初三, 头一次看到学生们从考场出来是那么地沮丧. 一个个自嘲130分是自己的最高分, 是读初三以来最难的一次考试, 考试结束后, 笔者对24题进行了详细分析.

原题: 如图1, 在平面直角坐标系xOy中, 二次函数$y=ax^2+6x+c$的图像经过点$A(4,0)$、$B(-1,0)$, 与y轴交于点C, 点D在线段OC上, $DO=t$, 点E在第二象限, $\angle ADE=90°$, $\tan\angle DAE=\dfrac{1}{2}$, $EF\perp OD$, 垂足为点F.

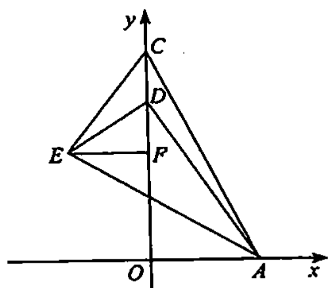


图1

(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 求线段EF、OF的长(用含t的代数式表示);

(3) 当$\angle ECA=\angle CAO$时, 求t的值.

一、解法探究

(1) 二次函数$y=ax^2+6x+c$的图像经过点$A(4,0)$、$B(-1,0)$, 易求解析式为$y=-2x^2+6x+8$.

(2) 由$\angle ADE=90°$, 易证$\triangle EDF\backsim\triangle DAO$,

$\therefore \dfrac{ED}{DA}=\dfrac{EF}{DO}=\dfrac{DF}{AO}$.

$\because \tan\angle DAE=\dfrac{ED}{DA}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \dfrac{EF}{t}=\dfrac{DF}{4}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}t, DF=2$,

$\therefore OF=t-2$.

第(3)小题中条件$\angle ECA=\angle CAO$的作用及解法探究:

1. 从三角形相关知识进行思考.

(1) 若$\angle ECA$与$\angle CAO$在同一个三角形中, 即可得出这两个角所对的边相等. 然而图中并没有以$\angle ECA$、$\angle CAO$为内角的三角形, 要从这个角度解决问题, 需要构造以这两个角为内角的三角形. 因此有了如下解法:

解法一: 如图2, 延长CE与x轴交于点H.

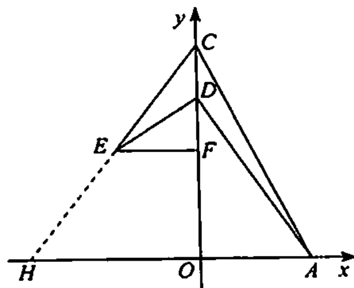


图2

$\because \angle ECA=\angle CAO$,

$\therefore CH=AH$.

$\because EF/\!/AH$, $\dfrac{CF}{OC}=\dfrac{EF}{HO}=\dfrac{CE}{CH}$,

即 $\dfrac{\frac{1}{2}t}{HO}=\dfrac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}t\right)^2+(10-t)^2}}{CH}=\dfrac{10-t}{8}$,

$\therefore HO=\dfrac{4t}{10-t}$, $AH=4+\dfrac{4t}{10-t}$, $CH=\dfrac{4\sqrt{5t^2-80t+400}}{10-t}$.

$\therefore 4+\dfrac{4t}{10-t}=\dfrac{4\sqrt{5t^2-80t+400}}{10-t}$,

整理得$t^2-16t+60=0$, 解得

$t_1=6, t_2=10$.

$\because$ 当$t=10$时, 点F与点C重合, 舍去,

$\therefore t=6$.

解法二: 如图2, $\because$ 点C坐标为$(0, 8)$,

$\therefore$ 设直线CE的表达式为$y=kx+8$.

$\because EF=\frac{1}{2}t$, $OF=t-2$, 且点E在第二象限,

$\therefore$ 点E的坐标为$\left(-\frac{1}{2}t, t-2\right)$.

$\therefore t-2=-\frac{1}{2}tk+8$, 解得$k=\frac{2(10-t)}{t}$,

$\therefore y=\frac{2(10-t)}{t}x+8$.

令$y=0$, 则$\frac{2(10-t)}{t}x+8=0$, 解得$x=\frac{4t}{t-10}$,

$\therefore$ 点H的坐标为$\left(\frac{4t}{t-10}, 0\right)$.

$\because CH=AH$ (证法同上),

$\therefore \left(\frac{4t}{10-t}\right)^2+8^2=\left(4-\frac{4t}{t-10}\right)^2$,

整理得$-\frac{2t}{t-10}=3$, 解得$t=6$.

解法三: 如图3, 延长EF交AC于点G.

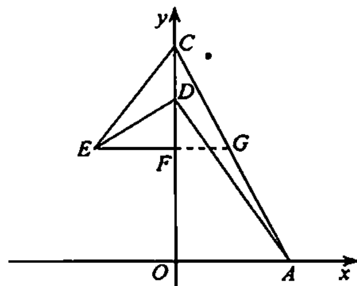


图3

$\because EF/\!/AH$,

$\therefore \angle EGC=\angle CAO=\angle ECA$,

$\therefore EG=EC$, $\frac{FG}{OA}=\frac{CF}{OC}$, $\frac{FG}{4}=\frac{10-t}{8}$,

$\therefore FG=5-\frac{1}{2}t$,

$\therefore EG=5$.

$\because EC^2=\left(\frac{1}{2}t\right)^2+(10-t)^2$,

$\therefore \left(\frac{1}{2}t\right)^2+(10-t)^2=25$,

整理得$t^2-16t+60=0$,

解得$t_1=6, t_2=10$.

$\because$ 当$t=10$时, 点F与点C重合, 舍去,

$\therefore t=6$.

解法四: 如图4, 分别过点O作$OK/\!/EC$交AC于点K, $OV\perp AC$于点V, 过点K作$KS\perp OC$于点S.

$\therefore \angle OKA=\angle ECA=\angle CAO$,

$\therefore OK=OA=4$,

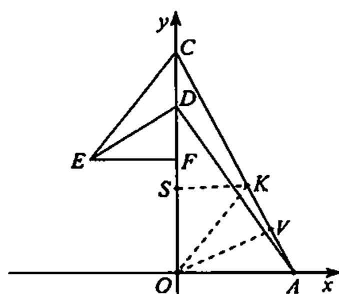


图4

$\therefore AK=2AV=2AO\cos A=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ $\left(其中\cos A=\frac{OA}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

$\because KS/\!/OA$,

$\therefore \frac{AK}{AC}=\frac{OS}{OC}$, 即$\frac{\frac{8}{5}\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{OS}{8}$, 解得$OS=3.2$,

$\therefore KS=2.4$.

$\because OK/\!/EC$,

$\therefore \angle KOC=\angle ECF$,

$\therefore \tan\angle KOC=\tan\angle ECF$, 即$\frac{EF}{CF}=\frac{SK}{OS}=\frac{3}{4}$, $\frac{\frac{1}{2}t}{10-t}=\frac{3}{4}$, 解得$t=6$.

(2) 若$\angle ECA$与$\angle CAO$在两个三角形内, 即为三角形相似或全等创造了条件. 从图1中可以看出$\angle CAO$在Rt$\triangle AOC$中, 没有以$\angle ECA$为内角的三角形, 所以需构造以$\angle ECA$为内角并且与Rt$\triangle AOC$相似的三角形. 因此有了如下解法:

解法五: 如图5, 过点E作AC的垂线, 垂足为点M, 交y轴于点Q.

易证$\triangle AOC\backsim\triangle CME$,

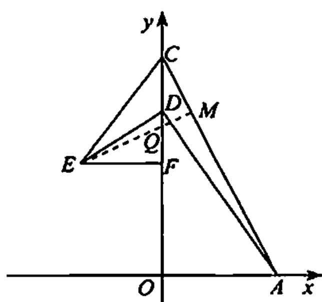


图5

$\therefore \dfrac{CM}{EM}=\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{1}{2}$.

设$CM=k$, 则$EM=2k$, $EC^2=\left(\dfrac{1}{2}t\right)^2+(10-t)^2=5k^2$.

$\therefore k^2=\dfrac{1}{4}t^2-4t+20$.

易证$\angle QEF=\angle ACO$,

$\therefore QF=\dfrac{1}{4}t$,

$CQ=10-t-\dfrac{1}{4}t=10-\dfrac{5}{4}t$,

$\dfrac{CM}{CQ}=\dfrac{CO}{AC}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

即$\left(\dfrac{CM}{CQ}\right)^2=\dfrac{k^2}{\left(10-\dfrac{5}{4}t\right)^2}=\dfrac{4}{5}$,

即$\dfrac{\dfrac{1}{4}t^2-4t+20}{\left(10-\dfrac{5}{4}t\right)^2}=\dfrac{4}{5}$,

整理得$t^2-16t+60=0$,

解得$t_1=6, t_2=10$.

$\because$ 当$t=10$时, 点F与点C重合, 舍去,

$\therefore t=6$.

解法六: 如图6, 取AC的中点T, 过点T作AC的垂线, 交y轴于点R, 连结AR.

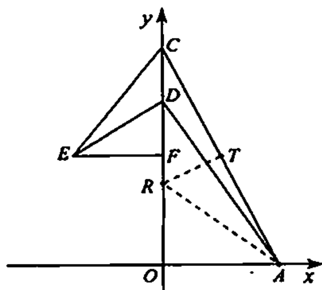


图6

易求得$AT=CT=2\sqrt{5}, RT=\sqrt{5}, CR=5, OR=3$.

$\because \angle ECA=\angle CAO, \angle RCA=\angle RAC$,

$\therefore \angle ECF=\angle RAO$.

又$\angle EFC=\angle AOR=90°$,

$\therefore \triangle EFC\backsim\triangle ROA$,

$\therefore \dfrac{EF}{OR}=\dfrac{CF}{AO}$, 即$\dfrac{\frac{1}{2}t}{3}=\dfrac{10-t}{4}$,

解得$t=6$.

2. *从四边形的相关知识进行思考.*

若这两个角同时出现在梯形内, 即可得出这个梯形的两腰相等. 于是有了以下解法:

解法七: 如图7, 过点E作AC的平行线, 交x轴于点P.

易得直线AC的表达式为$y=-2x+8$. 设直线EP的表达式为$y=-2x+b$.

$\because E\left(-\dfrac{1}{2}t, t-2\right)$,

$\therefore t-2=-2\left(-\dfrac{1}{2}t\right)+b$, 解得$b=-2$.

$\therefore y=-2x-2$,

令$y=0$则$x=-1$,

$\therefore AP=5$.

$\because EP/\!/AC$, EC不平行于AP,

$\therefore$ 四边形$ACEP$为梯形.

又$\angle ECA=\angle CAO$,

$\therefore$ 四边形$ACEP$为等腰梯形,

$\therefore EC=AP$.

$\because EC^2=\left(\dfrac{1}{2}t\right)^2+(10-t)^2$,

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}t\right)^2+(10-t)^2=25$, 整理得$t^2-16t+60=0$,

$\therefore t_1=6, t_2=10$.

$\because$ 当$t=10$时, 点F与点C重合, 舍去,

$\therefore t=6$.

二、困难原因分析

本题是以平面直角坐标系为背景来进行几何问题研究的, 是以学生非常熟悉的三角形和四边形的知识为载体, 考核以下重要的数学思想方法: 字母表示数、方程思想、函数思想、转化思想和数形结合的思想方法. 题目出示的图形中并没给出用以解决问题的完整图形, 学生需要根据两等角的条件, 自己添加辅助线, 构造基本图形. 本题的解题方向也比较多, 既可利用三角形的相关知识, 又可利用

四边形的相关知识. 但是为什么这样一道原本熟悉的问题, 在考场上却成了学生眼中的陌生题、难题呢? 究其原因主要有以下几个方面:

(1) 无法将题中给出的两个分散的等角条件集中在基本图形中

由于图中没有直接给出与两个等角建立其他联系的基本图形, 所以部分学生无法感知等角的作用, 从而无法将已知和未知建立联系. 从思维角度来讲, 学生缺乏逆向思维和发散性思维的能力. 要做好此题, 首先要能够想到, 哪些基本图形中存在等角; 或者说有了等角, 可产生哪些基本图形. 有了这样的意识, 才能结合题目图形合理添加辅助线, 主动构造基本图形, 将两等角集中在基本图形中, 利用基本图形的性质完成任务.

(2) 思路单一, 无法跳出相似框框

由于相似三角形是初三阶段的主要教学内容, 也是重点内容, 因此学生对此内容的印象极其深刻, 导致一遇到和三角形有关的问题就考虑相似, 特别是本题中又给出了两个等角的条件, 为相似准备了一个角相等的条件. 解法中笔者也出示了两种构造相似三角形完成任务的方法 (解法五和解法六), 但是相对于构造等腰三角形解决问题而言, 解法五构造相似的方法简单, 但不容易完成计算; 解法六的构图方法虽然不易想到, 但一旦将图形补画完整, 计算相对来讲比解法五方便. 也就是说, 无论选用解法五、还是解法六, 都是有一定难度的, 一旦思维受阻, 将无路可走.

(3) 计算能力弱、无法完成计算

以上各种解法中, 相关线段的长度都是用代数式表示的. 代数式多了, 就会出现各种各样的问题, 如表示线段的代数式形式错误、代入错误、化简错误、解方程错误等等, 学生常常是顾此失彼, 大大降低了运算正确率. 另外, 面对繁难的计算, 由于缺乏良好的心理素质, 无法静心、耐心、细心地进行计算.

三、对今后教学的几点建议

中考数学注重的是能力的考查, 其正确的解题思路源于对基础知识、基本技能和数学思想方法的熟练掌握. 因此教师在平时的教学中要加强双基, 引导学生构建知识网络, 更好地适应中考要求.

(1) 在几何教学中应加强"基本图形"的渗透

在研究几何问题时, 我们把能够反映一个或几个定理, 或是经常使用, 具有特定性质的图形叫做基本图形. 教学中, 教师要及时总结这些基本图形, 与学生交流, 引导学生在解决几何问题时善于从复杂的图形中找出与条件和结论有关的一个或几个基本图形, 应用这些基本图形的性质将问题解决. 但是很多时候, 若找不到完整的基本图形, 要尝试找到基本图形的一部分, 然后通过添加辅助线将基本图形补全, 再应用基本图形的性质解决问题.

(2) 在数与式的教学中加强计算能力的培养

一直以来, 为了给学生创设一个愉快和谐的发展思维的空间, 在教学中应以掌握算法和算理、避免繁难计算为主导思想, 加强字母表示数的能力和计算能力的培养.

(上接第12-24页)

[9] 郭书春. 汇校九章算术 [M]. 沈阳/台北: 辽宁教育出版社/九章出版社, 2004.

[10] 婆什伽罗 (林隆夫, 徐泽林等译). 莉拉沃蒂 [M]. 北京: 科学出版社, 2008: 98 - 114.

[11] Siegler, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation.* New York: Springer-Verlag, 2002.

[12] 汪晓勤, 王苗. 法国初中数学教材中的勾股定理: 文化视角 [J]. 中学数学教学参考 (初中版), 2011(1-2): 128 - 130.

简析一道高考压轴题

200023 上海市黄浦区教育学院 李 恒

2012年全国高考上海卷数学理科第23题题目如下:

对于数集 $X=\{-1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 其中 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$, $n\geqslant 2$, 定义向量集 $Y=\{(s,t)|s\in X,t\in X\}$. 若对任意 $\overrightarrow{a_1}\in Y$, 存在 $\overrightarrow{a_2}\in Y$, 使得 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$, 则称 X 具有性质 P. 例如 $\{-1,1,2\}$ 具有性质 P.

(1) 若 $x>2$, 且 $\{-1,1,2,x\}$ 具有性质 P, 求 x 的值;

(2) 若 X 具有性质 P, 求证 $1\in X$, 且当 $x_n>1$ 时, $x_1=1$;

(3) 若 X 具有性质 P, 且 $x_1=1$, $x_2=q$(q 为常数), 求有穷数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的通项公式.

一、试题评析

这是试卷的最后一题, 人们习惯称之为压轴题. 该题具有如下特点:

1. 突出考查理性思维能力. 首先, 本题中的条件表述较为抽象, 涉及“任意”、“存在”这样的逻辑量词与“向量集”、“具有性质 P”这样的新概念, 对学生的数学理解能力有较高的要求; 其次, 本题对学生的逻辑推理能力要求较高, 其中第(2)小题是一道证明题, 第(3)小题求解的关键是证明数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是等比数列; 再者, 多数学生对本题的问题情境比较陌生, 无法套用一些固定的解题套路, 由于在求解过程中需要将条件不断地进行转化, 而转化路径的合理选择需要有较强的理性思维能力.

2. 情境新颖、构思精妙、综合性强. 首先, 命题者在题目条件中引入了新概念“具有性质P”, 并在新概念的定义中使用了向量工具, 从而创设了颇为新颖的情境; 其次, 命题者围绕“具有性质 P”这一新概念提出了几个具有不同思维层次的问题, 将对新概念相关性质的探究逐步引向深处, 整体构思颇为精妙; 再者, 本题具有较强的综合性, 它将对集合、向量、不等式、数列等知识的考查融为一体, 体现了在知识“交汇点”处命题这一原则.

二、试题简解

(1) 取 $\overrightarrow{a_1}=(2,x)$, 则存在 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)\in Y$, 使得 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=2s+tx=0$, 即 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{s}{-t}$, 必有 $t=-1$ 且 $s=2$, 所以 $x=4$.

(2) 取 $\overrightarrow{a_1}=(x_1,x_1)$, 则存在 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)\in Y$, 使得 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=sx_1+tx_1=0$, 即 $s+t=0$, 故 s、t 一个为 -1, 另一个为1, 因此必有 $1\in X$.

取 $\overrightarrow{a_1}=(x_1,x_n)$, 则存在 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)\in Y$, 使得 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=sx_1+tx_n=0$, 即 $\dfrac{x_n}{x_1}=\dfrac{s}{-t}$, 必有 $s=-1$ 或 $t=-1$. 若 $s=-1$, 则 $\dfrac{x_1}{x_n}=t$, 又 $x_n>1$, 故 $\dfrac{x_1}{x_n}<x_1$ 与 $t\geqslant x_1$ 矛盾, 从而必有 $t=-1$, 且 $s=\dfrac{x_n}{x_1}$. 若 $x_1<1$, 则 $s=\dfrac{x_n}{x_1}>x_n$ 与 $s\in X$ 矛盾, 故 $x_1\geqslant 1$, 从而 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 均大于1, 又 $1\in X$, 所以 $x_1=1$.

(3) 对于 $\overrightarrow{a_1}=(x_k,x_n)(1\leqslant k<n)$, 存在向量 $\overrightarrow{a_2}=(s,t)(s\in X,t\in X\}$, 使得 $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$, 则 $\dfrac{s}{-t}=\dfrac{x_n}{x_k}\in(1,x_n]$, 故有 $t=-1$, 且 $\dfrac{x_n}{x_k}=s\in\{x_2,x_3,\cdots,x_n\}$. 又 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}<\dfrac{x_n}{x_{n-2}}<\cdots<\dfrac{x_n}{x_1}$, 故 $\dfrac{x_n}{x_k}=x_{n+1-k}(1\leqslant k<n)$, 即 $x_n=x_2x_{n-1}=x_3x_{n-2}=\cdots=x_nx_1$, 同理可得 $x_{n-1}=x_2x_{n-2}=x_3x_{n-3}=\cdots=x_{n-1}x_1$. 故 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\dfrac{x_2x_{n-1}}{x_2x_{n-2}}=\dfrac{x_3x_{n-2}}{x_3x_{n-3}}=\cdots=\dfrac{x_{n-1}x_2}{x_{n-1}x_1}$, 即 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}}=\cdots=\dfrac{x_2}{x_1}=q$, 所以 $x_i=x_1q^{i-1}=q^{i-1}$, $i=1,2\cdots,n$.

说明: 1. 在上述第(2)小题的求解过程中, 我们可以得到如下结论: 若x具有性质P, 则有$x_1 = 1$或$x_n = 1$. 因此, 第(2)小题可以改为"若x具有性质P, 求证$x_1 = 1$求$x_n = 1$". 这样题目的表述更简练一些, 当然难度也有所增大. 或许是出于降低难度的考虑, 命题者将这一小题分成两部分, 前一部分为后一部分的解答铺设了台阶.

2. 关于第(3)小题, 命题组给出的参考答案中提供了两种解法: 第一种解法先猜测数列的通项公式, 然后用数学归纳法证明, 这种解法的思路较为自然, 但求解过程稍显繁琐; 第二种解法是先证明数列是等比数列, 然后再求通项公式, 这种解法的思维跨度大, 思维层次要求较高. 而上面笔者给出的第(3)小题的解法与第(1)、(2)小题的处理方法较为一致, 解题思路比较自然, 思维的跨度也比较小, 并且较命题组的解法一与解法二更简便一些.

三、相似试题

笔者发现, 此题与2009年全国高考北京卷理科第20题颇为相似. 该题如下:

已知数集$A = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}(1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n, n \geqslant 2)$具有性质$P$: 对任意的$i$、$j\,(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$, a_ia_j与$\frac{a_j}{a_i}$两数中至少有一个属于A.

(I) 分别判断数集$\{1,3,4\}$与$\{1,2,3,6\}$是否具有性质P, 并说明理由;

(II) 证明: $a_1 = 1$, 且

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = a_n;$$

(III) 证明: 当$n = 5$时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5成等比数列.

解: (I)略; (II)因为$A = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$具有性质$P$, 所以$a_na_n$, $\frac{a_n}{a_n}$至少有一个属于A, 由于$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 所以$a_na_n > a_n$, 故$a_na_n \notin A$, 从而$1 = \frac{a_n}{a_n} \in A$, 故$a_1 = 1$.

由A具有性质P, 可知$\frac{a_n}{a_k} \in A(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$, 又因为$\frac{a_n}{a_n} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \cdots < \frac{a_n}{a_2} < \frac{a_n}{a_1}$, 所以

$$\frac{a_n}{a_n} = a_1, \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_2, \cdots, \frac{a_n}{a_2} = a_{n-1},$$

$\frac{a_n}{a_1} = a_n$, 从而$\frac{a_n}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_2} + \frac{a_n}{a_1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, 故

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = a_n.$$

(III)由(II)知, 当$n = 5$时, 有$\frac{a_5}{a_4} = a_2, \frac{a_5}{a_3} = a_3, \frac{a_5}{a_2} = a_4, \frac{a_5}{a_1} = a_5$, 即$a_5 = a_2a_4 = a_3a_3 = a_4a_2 = a_5a_1$, 又因为$a_3a_4 > a_2a_4 = a_5$, 故$a_3a_4 \notin A$, 即$\frac{a_4}{a_3} \in A$. 又$1 < \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} < a_3$, 所以$\frac{a_4}{a_3} = a_2$, 故有$a_4 = a_2a_3 = a_3a_2 = a_4a_1$, 所以$\frac{a_5}{a_4} = \frac{a_2a_4}{a_2a_3} = \frac{a_3a_3}{a_3a_2} = \frac{a_4a_2}{a_4a_1}$, 即$\frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$, 所以数列$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$成等比数列.

说明: (1) (III)中的结论可以推广到一般, 即当$n = 3$或$n \geqslant 5$时, 数列$a_1, a_2, \cdots, a_n$成等比数列. 对于$n = 3$的情形, 很容易验证. 下面探讨一下$n \geqslant 5$的情形, 其证明方法与上面的方法完全相同. 证明过程如下:

由(II)知$\frac{a_n}{a_n} = a_1, \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_2, \cdots, \frac{a_n}{a_2} = a_{n-1}, \frac{a_n}{a_1} = a_n$, 故$a_n = a_2a_{n-1} = \cdots = a_{n-1}a_2 = a_na_1$, 又当$3 \leqslant k \leqslant n-1$时, 有$a_ka_{n-1} \geqslant a_3a_{n-1} > a_2a_{n-1} = a_n$, 故有$a_ka_{n-1} \notin A$, 即$\frac{a_{n-1}}{a_k} \in A$. 又$\frac{a_{n-1}}{a_3} > \frac{a_{n-1}}{a_4} > \cdots > \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} > \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} = 1$, 且$\frac{a_{n-1}}{a_3} = \frac{a_{n-2}}{a_2} < a_{n-2}$, 可得

$$a_{n-1} = a_3a_{n-3} = \cdots = a_{n-2}a_2 = a_{n-1}a_1(*).$$

又$a_{n-2}a_2 = a_2a_{n-2}$, 故有$a_{n-1} = a_2a_{n-2} = a_3a_{n-3} = \cdots = a_{n-2}a_2 = a_{n-1}a_1$, 所以$\frac{a_n}{\ } \ \frac{a_2a_{n-1}}{\ } \ \frac{a_3a_{n-2}}{\ } \cdots =$

a_{n-} [illegible] 即 [illegible] $= q$,

a_{n-} [illegible]

故当 [illegible]

[illegible] 出了

证明 [illegible] 一致

客观题的定性和定量分析

201600 上海市松江二中 张忠旺

定性分析主要是根据直觉、经验和被分析对象的信息, 对研究对象的性质、特点和变化规律作出判断. 定量分析是依据已知信息, 通过计算和逻辑推理, 分析对象的性质、特点和变化规律. 定性分析常依据感知迅速地对问题作出判断, 思维具有简约性, 它是定量分析的前提, 没有定性的定量是盲目的、毫无价值的. 而定量分析使定性更科学、准确, 从而得出严谨和正确的结论. 定性分析与定量分析是相互补充的.

在高考试题中, 一些压轴的客观题难度较大, 由于考试时间限制, 学生需要避开繁琐的运算和严谨的推证, 通过定性分析迅速地确定答案. 但在平时教学中, 我们不能仅仅满足于通过定性分析得到正确答案, 还应以培养学生的逻辑推理能力为目标, 小题大做, 引导学生对这些问题作严谨的定量分析, 揭示问题的推理过程, 挖掘问题的思维价值, 以提高

~~~~~~

的, 因此可合二为一. 若将上述证明过程与文 [1] 进行比较, 容易发现上述证明方法更为简便与快捷.

(2) 若 A 具有性质 P, 则 a_ia_j 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 至少有一个属于 A, 则可能出现以下三种情形: ① $a_ia_j \notin A, \frac{a_j}{a_i} \in A$; ② $a_ia_j \in A, \frac{a_j}{a_i} \in A$; ③ $a_ia_j \in A, \frac{a_j}{a_i} \notin A$. 从上述求解过程中, 我们可以发现只有当 $n = 4$ 时, 才可能会出现情形③ $\left(\text{例如集合 } \{1,2,3,6\} \text{ 具有性质 } P, \text{但 } 2 \times 3 = 6 \in A \text{ 且 } \frac{3}{2} \notin A\right)$, 这时的数列 a_1, a_2, a_3, a_4 不一定是等比数列; 在其他情形下, 一定有 $\frac{a_j}{a_i} \in A$. 而在 $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots a_n$ 与 $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 的同样前提下, "$\frac{a_j}{a_i} \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$" 与 2012 年上海高考压轴题中的"$X$ 具有性质 P"是完全一致的; 在 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 与 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 的同样前提下, "X 具有性质 P"与"$\frac{a_j}{a_i} \in A$ 求 $\frac{a_i}{a_j} \in A(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$" 是完全一致的.

四、两点启示:

(1) 重视理性思维能力的培养. 理性思维能力是数学能力的核心, 它是衡量学生数学学习潜能的重要标志. 从今年的高考中, 我们可以看到试题对学生理性思维能力的要求明显提高, 导致许多考生很不适应. 为此, 我们应高度重视并切实加强对学生理性思维能力的培养: 应优化教学模式, 克服"教学题型化"与"解题套路化"的片面倾向, 使数学教学过程成为学生数学思维活动的过程; 应充分调动与展示学生的思维过程, 并沿着学生的思维轨迹因势利导, 克服盲目性, 提高针对性; 应高度重视解题思路的探索过程和解题后的反思过程, 使学生的理性思维得到充分的锤炼.

(2) 加强对创新型试题的研究. 一方面, 作为教师, 应加强对创新型试题的研究. 通过选择与编拟优秀的创新型试题, 强化学生的提出、分析与解决新问题的能力, 从而将培养学生的创新意识真正落到实处. 另一方面, 作为命题者, 也应加强对创新型试题的研究. 通过编拟高质量的创新型试题来考查考生的高层次思维能力与创新意识, 同时对中学教学也能发挥良好的导向作用.

参考文献

[1] 侯宝坤. 2009 年高考北京理科数学压轴题的探究 [J]. 数学通讯, 2009(9)(下半月): 41 – 43.
~~~~~~

学生分析问题、解决问题的能力. 下面我们以2012年的几道高考客观题为例进行说明.

例1 (2012年全国高考四川卷理科第12题) 设函数 $f(x)=2x-\cos x$, $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列, $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$, 则 $[f(a_3)]^2-a_1a_5=$ ······················ ( )

A. 0; B. $\frac{1}{16}\pi^2$; C. $\frac{1}{8}\pi^2$; D. $\frac{13}{16}\pi^2$.

定性分析:

因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列, 且 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$, 所以

$2(a_1+a_2+\cdots+a_5)-(\cos a_1+\cos a_2+\cdots+\cos a_5)=5\pi$.

猜测 $(\cos a_1+\cos a_2+\cdots+\cos a_5)=0$, 所以 $2(a_1+a_2+\cdots+a_5)=2\times 5a_3=5\pi$, 解得 $a_3=\frac{\pi}{2}, a_1=\frac{\pi}{4}, a_2=\frac{3\pi}{8}, a_4=\frac{5\pi}{8}, a_5=\frac{3\pi}{4}$, 经验证

$\cos a_1+\cos a_2+\cos a_3+\cos a_4+\cos a_5=0$, 所以

$[f(a_3)]^2-a_1a_5=(2a_3-\cos a_3)^2-a_1a_5=\pi^2-\frac{3\pi^2}{16}=\frac{13\pi^2}{16}$.

定量分析:

由已知得 $2(a_1+a_2+\cdots+a_5)-(\cos a_1+\cos a_2+\cdots+\cos a_5)=5\pi$, ················(1)

因为 $\cos a_1+\cos a_2+\cdots+\cos a_5=(\cos a_1+\cos a_5)+(\cos a_2+\cos a_4)+\cos a_3=2\cos\frac{\pi}{4}\cos a_3+2\cos\frac{\pi}{8}\cos a_3+\cos a_3=(\sqrt{2}+1+\sqrt{\sqrt{2}+1})\cos a_3$, 所以 (1) 式化为

$10a_3-(\sqrt{2}+1+\sqrt{\sqrt{2}+1})\cos a_3=5\pi$. (2)

构造函数 $g(x)=10x-(\sqrt{2}+1+\sqrt{\sqrt{2}+1})\cos x$.

因为 $g'(x)=10+(\sqrt{2}+1+\sqrt{\sqrt{2}+1})\sin x>0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 因为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=5\pi$, 所以方程 (2) 有唯一解 $a_3=\frac{\pi}{2}$, 可得 $a_1=\frac{\pi}{4}, a_5=\frac{3\pi}{4}$.

所以 $[f(a_3)]^2-a_1a_5=(2a_3-\cos a_3)^2-a_1a_5=\pi^2-\frac{3\pi^2}{16}=\frac{13\pi^2}{16}$.

本题需要综合运用等差数列性质和三角函数性质来解决, 难度较大. 解决问题的关键是利用函数的单调性.

例2 (2012年全国高考山东卷理科第12题) 设函数 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=ax^2+bx$(a、$b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$), 若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则下列判断正确的是 ········· ( )

(A). 当 $a<0$ 时, $x_1+x_2<0, y_1+y_2>0$;

(B). 当 $a<0$ 时, $x_1+x_2>0, y_1+y_2<0$;

(C). 当 $a>0$ 时, $x_1+x_2<0, y_1+y_2<0$;

(D). 当 $a>0$ 时, $x_1+x_2>0, y_1+y_2>0$.

定性分析:

在同一直角坐标系中分别画出两个函数的图像, 当 $a<0$ 时, 要想满足条件, 则有如图1的位置关系, 作出点 A 关于原点的对称 C 点, 则点 C 坐标为 $(-x_1,-y_1)$, 由图1知 $-x_1<x_2, -y_1>y_2$, 即 $x_1+x_2>0, y_1+y_2<0$. 同理当 $a>0$ 时, 有 $x_1+x_2<0, y_1+y_2>0$, 故答案选 (B).

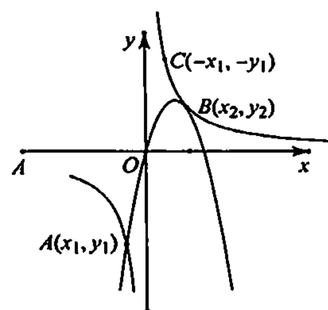


图1

定量分析:

令 $\frac{1}{x}=ax^2+bx$, 则 $ax^3+bx^2-1=0$ $(x\neq 0)$. ·································(1)

$y=f(x)$ 的图像与 $y=g(x)$ 图像有且仅有两个不同的公共点等价于方程 (1) 有两个不同的根 x_1、x_2 (其中 x_1 为重根), 即

$ax^3+bx^2-1=a(x-x_1)^2(x-x_2)$,

比较系数得 $\begin{cases} x_1=-2x_2, \\ x_1^2x_2=\frac{1}{a}. \end{cases}$

(1) 当 $a>0$ 时, $x_2>0$, $x_1+x_2=-x_2<0$, $y_1+y_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-x_2}{-2x_2^2}=\frac{1}{2x_2}>0$;

(2) 当$a<0$时, $x_2<0$, $x_1+x_2=-x_2>0$, $y_1+y_2=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{1}{2x_2}<0$. 综上可知答案应选(B).

本题的解答过程体现了数形结合、等价转化的思想.

例3 (2012年全国高考江西卷理科第10题) 如图2, 已知正四棱锥$S-ABCD$所有棱长都为1, 点E是侧棱SC上一动点, 过点E垂直于SC的截面将正四棱锥分成上、下两部分. 记$SE=x(0<x<1)$, 截面下面部分的体积为$V(x)$, 则函数$y=V(x)$的图像大致为 ··(　)

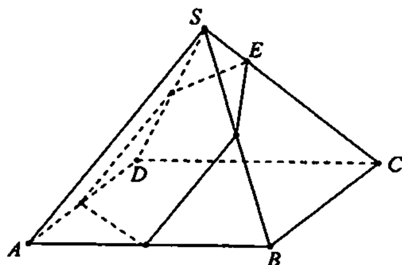
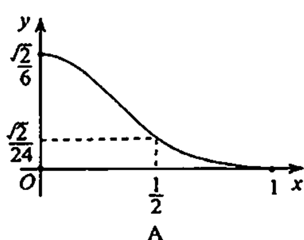
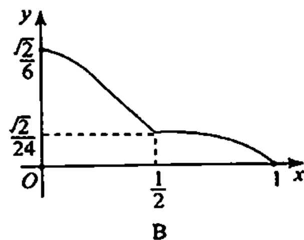


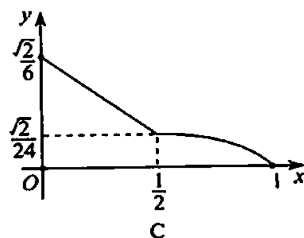
图2



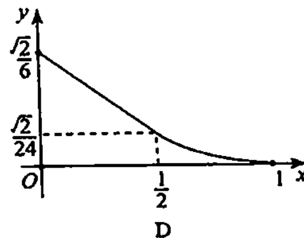
A



B



C



D

定性分析:

当$0<x<\dfrac{1}{2}$时, 随着x的增大, 观察图形可知$V(x)$单调递减, 且递减的速度越来越快; 当$\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$时, 随着$x$的增大, 观察图形可知$V(x)$单调递减, 且递减的速度越来越慢; 再观察各选项中的图像, 发现只有A图像符合. 故选(A).

定量分析:

(1) 当$0<x<\dfrac{1}{2}$时, 过点E垂直于SC的截面为五边形$EFGHK$, 如图3, 设SC的中点为点M, 则$EK/\!/BM$. 在$\triangle SEK$中, $EK=\sqrt{3}x$.

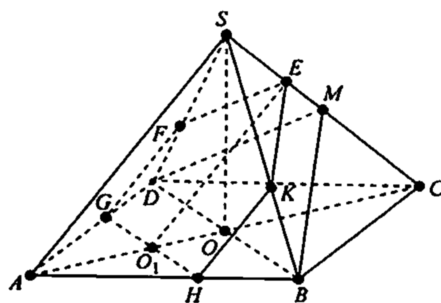


图3

因为$SA\perp SC$, 所以$SA/\!/$截面EFH, 于是$KH/\!/SA$. 可得

$KH=KB=1-2x, AH=SK=2x$, $O_1H=\sqrt{2}x$,

$EO_1=EC=1-x, SO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$S_{\text{五边形}EFGHK}=2\times\dfrac{1}{2}[(1-x)+(1-2x)]\sqrt{2}x=\sqrt{2}x(2-3x)$,

$V_{SA-EFGHK}=V_{S-EFGHK}+V_{S-AHG}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot x^2(2-3x)+\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{2}(2x)^2\right]\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}x^2(1-x)$,

$V(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{6}-V_{SA-EFGHK}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}-\sqrt{2}x^2(1-x)$.

(2) 当$\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$时, 如图4, $EG=EF=\sqrt{3}(1-x)$,

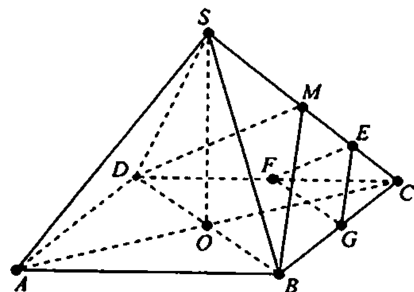


图4

$FG=2\sqrt{2}(1-x)$,

$S_{\triangle EFG}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}(1-x)\cdot\sqrt{[\sqrt{3}(1-x)]^2-[\sqrt{2}(1-x)]^2}=\sqrt{2}(1-x)^2$.

$V(x)=\dfrac{1}{3}S_{\triangle EFG}\cdot CE=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(1-x)^3$.

(下转第12-48页)

高次幂同余问题在数学竞赛中的应用

200241 华东师范大学数学系本科生 董晓立
200241 华东师范大学数学系 陈月兰

我们在小学的奥数中遇到过这样的问题: 求 3^{2011} 的最后一位是多少?

对于小学生来说, 他们解决该问题的思路为先列举一些特殊的幂, 然后从中寻求规律:

3^1 的个位数是3, 3^2 的个位数是9, 3^3 的个位数是7, 3^4 的个位数是1, 3^5 的个位数是3, $\cdots$

发现 3^n 的个位数是按照3, 9, 7, 1的顺序4个一组进行循环的. 由于2011除以4余3, 得到 3^{2011} 的最后一位是这一组循环数的第三个数字——7.

解决这个问题, 最关键的是找到单位元, 即求出 x, 使得 $a^x\equiv 1(\operatorname{mod} m)$, 并通过化归的思想, 将问题中的高次幂利用所得到的单位元进行降次, 从而直接计算较低次幂得到结果.

下面, 我们首先简单介绍在解决此类高次幂同余问题中需要用到的定理:

定理1 (费马小定理) 若 p 是素数, 且 $(a,p)=1$,则 $a^{p-1}\equiv 1(\operatorname{mod} p)$.

定理2 同余式组 $a\equiv b(\operatorname{mod} m_j)$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 同时成立的充要条件是 $a\equiv b(\operatorname{mod}\ [m_1,\cdots,m_k])$.

定义1 (欧拉函数) 设 $a\in\mathbf{N}$, 不大于 a 且与 a 互素的正整数个数称为 a 的欧拉函数, 记为 $\varphi(a)$. 特别地, 规定 $\varphi(1)=1$.

定理3 若 $p=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$, 则 $\varphi(a)=a\times\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right)$, 特别地, $\varphi(p_0^a)=p_0^a-p_0^{a-1}$, 其中 $p_0,p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是素数.

定理4 (欧拉定理) 若 (a,m)=1, 则 $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\operatorname{mod} m)$.

定理5 (孙子定理) $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 为两两互素的正整数 $(n\geqslant 2)$, 记 $M=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$, $M_i=\dfrac{M}{m_i}$, 则同余方程组 $x\equiv c_i(\operatorname{mod} m_i)$ 的解 $x\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}M_iM_i'c_i\ (\operatorname{mod} M)$, 其中 $M_iM_i'\equiv 1(\operatorname{mod} m_i)$, $(i=1,2,\cdots,n)$.

下面我们举例说明高次幂同余问题在数学竞赛中的应用.

例1 (1990年国家集训队训练题) 求出所有小于10的正整数 M, 使得5整除 1989^M+M^{1989}.

分析: 本道题目只需分别考虑 1989^M 和 M^{1989} 两数的关于模5的最小非负余数即可.

解: 因为 $1989\equiv -1(\operatorname{mod} 5)$,

所以 $1989^M\equiv(-1)^M(\operatorname{mod} 5)$.

若 $M=5$, $5|M^{1989}$, $1989^5\equiv -1\ (\operatorname{mod} 5)$, 则5不能整除 1989^5+5^{1989}, 即 $M\neq 5$.

若 $M\neq 5$, 且 $1\leqslant M\leqslant 9$, 则 $(5, M)$=1.

由定理1(费马小定理)得到: $M^4\equiv 1(\operatorname{mod} 5)$, 所以 $M^{1989}\equiv M(\operatorname{mod} 5)$.

故 $1989^M+M^{1989}\equiv(-1)^M+M(\operatorname{mod} 5)$.

若 M 为奇数, 则 $M-1\equiv 0(\operatorname{mod} 5)$, 解得 $M=1$, 若 M 为偶数, 则 $M+1\equiv 0(\operatorname{mod} 5)$, 解得 $M=4$, 综上得 $M=1$ 或4.

例2 求 $(13481^{56}-77)^{28}$ 被111除后的最小非负余数.

分析: 由于 $111=3\times 37$, 我们可以找关于模3和37的最小非负余数.

解: 因为 $13481^{56}\equiv 2^{56}\equiv 4^{28}\equiv 1(\operatorname{mod} 3)$, $-77\equiv 1(\operatorname{mod} 3)$,

所以 $(13481^{56}-77)^{28}\equiv(1+1)^{28}\equiv 4^{14}\equiv 1(\operatorname{mod} 3)$.

由费马小定理得: $13^{36}\equiv 1(\operatorname{mod} 37)$, 又 $13^4\equiv -3(\operatorname{mod} 37)$,

所以 $13481^{56} \equiv 13^{56} \equiv 13^{20} \equiv (-3)^5 \equiv -243 \equiv 16 \pmod{37}$,

$(13481^{56} - 77)^{28} \equiv (16-3)^{28} \equiv (-3)^7 \equiv (-3) \times 26 \equiv 33 \pmod{37}$.

在0~110中所有满足被37除余33的数有33, 70, 107, 其中只有70满足除3余1的性质.

说明: 更一般地, 最后一步可以利用孙子定理, 由 $m_1 = 3, m_2 = 37, c_1 = 1, c_2 = 33$, 可计算得 $M_1 = 37, M_1' = 1, M_2 = 3, M_2' = 25$, 所以 $(13481^{56} - 77)^{28} \equiv (1 \times 37 \times 1 + 33 \times 3 \times 25) \equiv 70 \pmod{111}$.

例3 (2005年德国数学奥林匹克竞赛题) 设 $Q(n)$ 表示正整数 n 的各个位数之和, 证明: $Q(Q(Q(2005^{2005}))) = 7$.

分析: 显见 $Q(n) \equiv n \pmod 9$, 那么即求出 2005^{2005} 模9的最小非负余数, 而对模的幂较大时, 我们引入欧拉函数, 采用欧拉定理进行求解.

证明: 因为 $10^n \equiv 1 \pmod 9$,

所以 $Q(n) \equiv n \pmod 9$.

$2005^{2005} \equiv (9 \times 222 + 7)^{2005} \equiv 7^{2005} \pmod 9$,

由欧拉定理得 $7^{\varphi(9)} \equiv 7^6 \equiv 1 \pmod 9$,

所以 $7^{2005} \equiv 7 \times 7^{2004} \equiv 7 \pmod 9$,

即 $Q(Q(Q(2005^{2005}))) \equiv 7 \pmod 9$.

以下证明 $Q(Q(Q(2005^{2005}))) = 7$.

因为 $2005^{2005} < (10^4)^{2005} = 10^{8020}$,

所以 $Q(2005^{2005}) < 8020 \times 9 < 10^5$,

因为 $Q(Q(2005^{2005})) \leqslant 5 \times 9 = 45$,

而在小于45的所有数字中各个位数之和最大的为39, 所以

$Q(Q(Q(2005^{2005}))) \leqslant 3 + 9 = 12$,

即 $Q(Q(Q(2005^{2005}))) = 7$ 得证.

例4 (2003年加拿大奥林匹克数学竞赛题) 求 $2003^{2002^{2001}}$ 的末三位数字.

分析: 该题即求 $3^{2002^{2001}}$ 关于模1000的最小非负余数.

解: $2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{2002^{2001}} \pmod{1000}$.

因为 $\varphi(1000) = 1000 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 400$,

所以由欧拉定理得 $3^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$.

因为 $2002^{2001} \equiv 2^{2001} \pmod{400}$, $400 = 16 \times 25$,

显然 $2^{2001} \equiv 0 \pmod{16}$. .... (1)

由欧拉定理可知

$2^{\varphi(25)} \equiv 2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$,

所以 $2^{2001} \equiv 2 \pmod{25}$. .... (2)

联立(1)、(2)式并利用孙子定理得

$2002^{2001} \equiv 2^{2001} \equiv 2 \times 16 \times 11 \equiv 352 \pmod{400}$.

即 $2002^{2001} = 400k + 352$ $(k \in \mathbf{N})$,

所以 $2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{2002^{2001}} \equiv 3^{400k+352} \equiv 3^{352} \pmod{1000}$.

因为 $3^{352} \equiv 9^{176} \equiv (10-1)^{176} \equiv C_{176}^2 \times 10^2 - C_{176}^1 \times 10 + 1 \equiv -1759 \equiv 241 \pmod{1000}$,

所以 $2003^{2002^{2001}}$ 的末三位数字为241.

小结:

当我们遇到比较复杂的高次幂同余问题时:

首先通过定理1(费马小定理)或定理4(欧拉定理)找到 $a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod p$ $((a,p) = 1)$, 对该高次幂进行降次化简, 然后利用定理5(孙子定理)进行求解.

以上几道例题均是近几十年来各国数学竞赛题, 在具体的解题过程中, 如何在不同情形下合理地使用定理是解题的重点和难点, 我们相信只有在深刻理解并熟练掌握定理的基础上, 才能使自己在灵活的数学竞赛中立于不败之地.

参考文献

[1] 潘承洞, 潘承彪. 简明数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1998.

[2] 陈月兰. 高观点下的初等数学[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2011.

[3] 沈文选, 张垚, 冷岗松, 唐立华. 奥赛经典专题研究奥林匹克数学中的数论问题[M]. 长沙: 湖南师范大学出版社, 2005.

数学问题与解答

2012年第10期问题解答

866. $\triangle ABC$的$\angle A$所含的旁切圆$\odot I$与边BC切于点D, 与边AB、AC的延长线分别切于点E、F, AI交$\triangle ABC$外接圆$\odot O$于点Q, 直线QD交$\odot O$于点P, 求证: $AP\perp IP$.

(243151 安徽省当涂县青山中学 令 标 供题)

图1

证: 连PB、PC、PE、PF.

由I为$\triangle ABC$的旁切圆圆心知$\angle BPD=\angle BAQ=\angle CAQ=\angle CPD$.

$\therefore \dfrac{PB}{PC}=\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BE}{CF}$.

由$\angle PBA=\angle PCA$知$\angle PBE=\angle PCF$, 于是$\triangle PBE\backsim\triangle PCF$, $\angle PEB=\angle PFC$. 故P、A、F、E四点共圆.

连IE、IF, 则$IE\perp AE$、$IF\perp AF$, A、F、I、E四点共圆. 因此A、F、I、E、P五点共圆, $\angle API=\angle AEI=90^\circ$, 即$AP\perp IP$.

867. 如图2, 凸四边形$ABCD$中, $\angle ABC=60^\circ$, $\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$, $AB=2$, $CD=1$, 对角线AC、BD就交于点O, 求$\sin\angle AOB$的值.

(400026 重庆市第36中学 李枝团供题)

图2

解: 设$AD=x$, $BC=y$. 由题设易知

$\angle ADC=120^\circ$,

$y^2+1^2=BD^2=x^2+2^2$,

$x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\cos 120^\circ=AC^2=y^2+2^2-2\cdot y\cdot 2\cos 60^\circ$.

由此得$\begin{cases} y^2-x^2=3, \\ x=6-2y \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{3}-2, \\ y=4-\sqrt{3}(\text{舍去使}x<0\text{的解}). \end{cases}$

记$\angle CBD=\alpha$, $\angle ADO=\beta$, 则$\sin\alpha=\dfrac{1}{BD}$, $\cos\alpha=\dfrac{y}{BD}$, $\sin\beta=\dfrac{2}{BD}$, $\cos\beta=\dfrac{x}{BD}$.

因A、B、C、D四点共圆. 故$\beta=\angle BCO$, $\sin\angle AOB=\sin(\alpha+\angle BCO)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{x}{BD^2}+\dfrac{2y}{BD^2}=\dfrac{x+2y}{BD^2}=\dfrac{6}{(4-\sqrt{3})^2+1}=\dfrac{3}{10-4\sqrt{3}}=\dfrac{15+6\sqrt{3}}{26}$.

868. 在$\triangle ABC$中, 求证:

$$\frac{6}{5}\leqslant\frac{1}{1+\sin^2A+\sin^2B}+\frac{1}{1+\sin^2B+\sin^2C}+\frac{1}{1+\sin^2C+\sin^2A}<3.$$

(621000 四川绵阳东辰学校高中部 姚先伟供题)

证: 由柯西不等式得

$$\frac{1}{1+\sin^2 A+\sin^2 B}+\frac{1}{1+\sin^2 B+\sin^2 C}$$
$$+\frac{1}{1+\sin^2 C+\sin^2 A}$$
$$\geqslant \frac{9}{3+2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}.$$

∴ 要证不等式左端, 只须证

$$\frac{9}{3+2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}\geqslant\frac{6}{5}\Longleftrightarrow$$
$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}.$$

事实上, 由$\sin^2 C=\sin^2(A+B)=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)^2\leqslant(\sin^2 A+\sin^2 B)(\cos^2 A+\cos^2 B)$, 得

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant(\sin^2 A+\sin^2 B)(\cos^2 A+\cos^2 B+1)\leqslant\frac{1}{4}[(\sin^2 A+\sin^2 B)+(\cos^2 A+\cos^2 B+1)]^2=\frac{9}{4}$, 当且仅当$A=B=C$时取等号.

因为在$\triangle ABC$中, $\frac{1}{1+\sin^2 A+\sin^2 B}<1$, 所以不等式右端显然成立. 当三个角$A$、$B$、$C$中两个趋于0, 另一个趋于$\pi$时, 不等式中三个分母均趋于1, 所以不等式中的"3"不能减小. 至此不等式得证.

869. 设a、b、$c>0$, 求证: $\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

(518108 广东省深圳市石岩公学高中部 康 宇供题)

证: 构造函数$f(x)=\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a^x+b^x+c^x}$, $x\in\mathbf{R}$. 不妨设$a\geqslant b\geqslant c>0$, 此时

$$f(x)=\frac{a\left(\frac{a}{c}\right)^x+b\left(\frac{b}{c}\right)^x+c}{\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x+1}$$
$$=a+\frac{(c-b)+(b-a)\left[\left(\frac{b}{c}\right)^x+1\right]}{\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x+1}$$
$$=a+\frac{c-b}{\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x+1}+\frac{b-a}{1+\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^x+\left(\frac{c}{a}\right)^x}}.$$

由于$\frac{a}{c}\geqslant1, \frac{b}{c}\geqslant1, 0<\frac{b}{a}\leqslant1, 0<\frac{c}{a}\leqslant1$, $c-b\leqslant0$, $b-a\leqslant0$, 所以函数$\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x+1$单调增加, $\frac{1}{\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x+1}$单调减少, $\frac{c-b}{\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x+1}$单调增加. 仿上可以说明函数$\frac{b-a}{1+\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^x+\left(\frac{c}{a}\right)^x}}$也是单调增加. 所以函数$f(x)$单调增加.

于是由$f(2)\geqslant f(-1)$可得$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{a^0+b^0+c^0}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}=\frac{3abc}{ab+bc+ca}$, 所以$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$. 不难看出, 仅当$a=b=c$时等号成立.

(编者按: 这里函数的单调增加或单调减少定义可参见一般的《数学分析》教材.)

870. 若任意x个连续正整数中必有一个数的各位数字之和是12的倍数, 求x的最小值.

(265703 山东省龙口市龙港经济开发区中村学校 张树胜供题)

解: 首先, 四个正整数$30n$, $30n+3$, $30n+6$, $30n+9$ ($n\in\mathbf{N}^*$) 都是3的倍数, 其各位数字之和都是3的倍数. 设$30n$的各位数字之和为$3a$, $a\in\mathbf{N}^*$, 由于$30n$的个位数字为0, 所以$30n+3$, $30n+6$, $30n+9$的各位数字之和依次为$3a+3$, $3a+6$, $3a+9$, 即$3(a+1)$, $3(a+2)$, $3(a+3)$. 由于a, $a+1$, $a+2$, $a+3$这四个连续正整数中必有一个是4的倍数, 所以$30n$, $30n+3$, $30n+6$, $30n+9$这四个正整数中必有一个数的各位数字之和是12的倍数.

任给39个连续正整数m, $m+1$, $m+2$, $\cdots$, $m+38$, 必有非负整数n_0, 使$30n_0+1\leqslant m\leqslant30(n_0+1)$. 于是

$m\leqslant30(n_0+1)<30(n_0+1)+3<30(n_0+1)+6<30(n_0+1)+9\leqslant m+38$,

这表明, 上述39个连续正整数中必有一个数的各位数字之和是12的倍数.

另一方面, 1, 2, $\cdots$, 38这38个连续正整数中, 每个数的各位数字之和都不是12的倍数.

因此, x 的最小值为39.

2012年第12期问题

871. $\triangle ABC$ 中, M、N 分别是 AB、AC 的中点, 点 P 在 BC 上 $(BP > PC)$, 射线 BA、PN 交于点 E, 射线 AC、MP 交于点 F, 求证: $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle BCF}$.

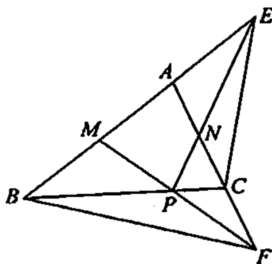


图3

(246003　安徽省安庆市华中西路彩印小区2号楼202室　黄全福供题)

872. 已知 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 切它的边于点 A_1、B_1、C_1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心重合, 问 $\triangle ABC$ 是正三角形吗?

(318000　浙江省台州市椒江区教育发展中心　金婉芬供题)

873. 设 $x > 0, y > 0$, 且 $x \neq y$, 若 $x^4 - y^4 = x^5 - y^5$, 求证: $1 < x + y < \frac{8}{5}$.

(414100　湖南省岳阳县土地储备中心　陈宽宏供题)

874. 已知 $x_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1, 2, \cdots, m, m \geqslant 2)$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = S$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $n \geqslant 2$, 求证: $\sum_{i=1}^{m} \sqrt[n]{\frac{x_i}{S - x_i}} \geqslant 2$.

(215500　江苏省常熟市中学　查正开供题)

875. 已知正实数 a, b, c 及 $\alpha \in (0, \pi)$ 满足等式 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, 求证:

(1) 存在 β、$\gamma \in (0, \pi)$, 满足 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, 且 $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

(2) 对上述 β、γ, 是否存在 $\theta \in (0, \pi)$, 使 $\sin\theta = \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma + 1}$? 如果不存在, 给出证明; 如果存在, 证明一共有几个.

(710062　陕西师范大学数学系　罗增儒供题)

(上接第12-43页)

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{6} - \sqrt{2}x^2(1 - x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(1 - x)^3, & \frac{1}{2} \leqslant x < 1, \end{cases}$$

图像如图5, 故选 (A).

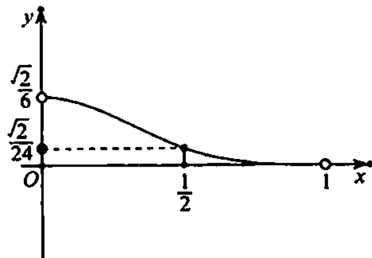


图5

本题属于函数图像的识别问题, 函数 $y = f(x)$ 的图像对应的解析式并不好求, 利用定性分析, 可以快速确定答案. 而上述定量分析, 涉及到立体几何的作图、证明、分类讨论、推理计算等, 需要综合运用数学知识和方法解决问题, 这对学生巩固数学知识, 提高数学能力是非常有益的.

本文通过几道例题的分析, 体现了客观题设计的精巧和独有的魅力. 在平时的教学中, 坚持对问题从定性和定量两个方面分析的教学理念, 是培养学生分析问题, 解决问题能力的一条有效途径.

数字用于表示货币面值和商品价格

200062　华东师范大学数学系　郑英元

人类最初是通过物物交换来互通有无. 后来有了货币, 形成了商品交易市场, 从而解决了人们对某些物品的需求途径. 货币开始是一种有一定价值的金属块, 图1是中国商代(公元前16世纪)使用的海贝和仿海贝的铜质货币, 图2是希腊公元前5世纪的银币. 现在的货币有硬币和纸币两种. 几乎所有货币都用数字表示它的面值, 以表明它的价值尺度. 每一个国家都发行自己的货币, 图3是欧洲某些国家统一使用的货币——欧元(€是欧元符号, 图中有硬币和纸币).



图1　(中国, 1981)



图2　(希腊, 1984)





图3　(德国邮资信封, 2000)

在出现货币的同时, 每一种商品或者服务也都有它的价值, 这种价值通过数字来表示它的价格. 图4是德国商品广告邮资封, 它标明面包, 糖果的价格是9.95欧元(€). 图5这枚中国邮票的面值是1.60元, 图6标明美国此项小本票的出售价格为6.60美元($). 图7是日本小本票, 它除了在小本票的封面(图7右面)上标明价格为100日元外, 在小本票的封底(图7左面)还罗列出日本邮政各项服务应付的邮资.



图4　(德国广告邮资信封, 2010)

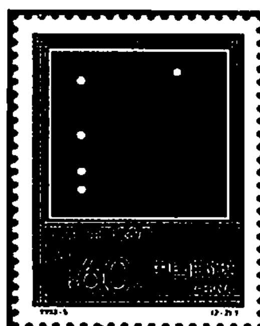


图5　(中国, 1993)



图6　(美国小本票, 1998)

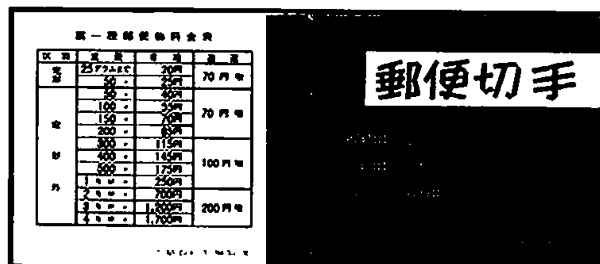


图7　(日本小本票, 1972)

编后漫笔

也说“圈养”和“散养”

张奠宙 赵小平

2012年8月9日的《侨报》有篇文章说到教育，其中用“圈养”比喻中国教育，用“散养”比喻欧美教育. 仔细咀嚼，颇有余味.

当今的教育家，强调学生的自主性，自然以“散养”、自己觅食为上策. 至于“圈养”限制自由，被动喂食，肯定是不好的了.

可是，深入一想，又觉得“圈养”是人类文明的成果. 遥想远古先民对待孩子，除了襁褓时期之外，稍有活动能力，也就让他尽量去主动觅食了. 待到人类文明产生和发展之后，就有了教育. 人是社会动物，不是只要寻食就能生存的. 诸如社会准则、道德规范、法律法规、知识技术，都需要圈起来“灌输”、“喂养”，才能快速地积累. 因此就有学校的出现，明确地要把孩子圈起来进行学习. 时至今日，义务教育的“圈养”时间是9年.

但是人们发觉，光是“圈起来养”不行，学而不思则罔. 要学会思考，就要“散养”，让学子们主动寻求知识，培养独立思考的能力.

说到底，“圈养”和“散养”，是相辅相成的两个养法. 长期的中国封建社会，缺少主动独立思考的教育传统，所以我们要强调“自主”，张扬个性. 但是也不要强调过头，“圈养”也不是错的.

(上接第12 14页)

还和泰勒级数紧密相关. 而探究发现，只用一个经典的结论 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 就能推出结论成立，这实在是一件非常吸引人的事情. 关于微积分的初等化，很多数学家都做过研究. 近年来以张景中、林群两位先生的工作尤为引人注意，他们希望不依赖极限概念而建立微积分体系，这样能够一定程度上降低微积分的入门门槛，让更多的人领会人类文明发展史上理性智慧的精华——微积分. 龚升先生曾说，将微积分称之为高等数学是习惯上的说法，微积分在牛顿时代自然是高等的，现在看来，只能说是数学的初步知识. 作为数学教育工作者，我们也希望在微积分初等化方面做一点点工作，促进初等数学的蓬勃发展，这对中学数学教学是大有好处的.

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2012年第12期(总第304期)

名誉主编：张奠宙
主　　编：赵小平
常务副主编：忻重义
发行范围：公开
电　　话：021-62232712

主管单位：中华人民共和国教育部
主办单位：华东师范大学
出　　版：上海《数学教学》杂志社
邮政编码：200062(上海中山北路3663号)
广告许可证：3100720050001
印　　刷：华东师范大学印刷厂
国内总发行：上海市邮政局报刊发行局
国内订阅：全国各邮电局
电子信箱：sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价：5.50元　国内统一连续出版物号：CN31-1024/G4　每月12日出版　代号：4-357